

1. Responde a las siguientes cuestiones

- (a) Enuncia el primer teorema de isomorfía. Aplícalo al ejemplo

$$f: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}^* \text{ dado por } f(z) = i^z \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: El enunciado puede verse en los apuntes. Para el ejemplo,

$$\ker f = \{z \in \mathbf{Z} \mid i^z = 1\} = 4\mathbf{Z}$$

$$\operatorname{Im} f = \{a + bi \in \mathbf{C} \mid a + bi = i^z, z \in \mathbf{Z}\} = \{\pm 1, \pm i\}$$

y se tiene

$$(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +) \cong (\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$$

- (b) Enuncia la ecuación de las clases, describiendo correctamente los términos que aparecen en ella (2 puntos).

Solución: Dado un grupo finito G

$$|G| = |\mathbf{Z}(G)| + \sum_{x \in S} [G : C_G(x)]$$

donde

- $| |$ significa orden.
 - $\mathbf{Z}(G) = \{z \in G \mid zx = xz \forall x \in G\}$ es el centro de G
 - S es un sistema de representantes de las clases de conjugación no triviales de G .
 - $C_G(x) = \{z \in G \mid zx = xz\}$
- (c) Define el concepto de normalizador de un subgrupo H en un grupo G . Calcúlalo para los subgrupos

$$H_1 = \langle (1 \ 2) \rangle, H_2 = \langle (1 \ 2 \ 3) \rangle \leq \Sigma_3 \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución: $N_G(H) = \{x \in G \mid H^x = H\}$ Puesto que $H \leq N_G(H) \leq G$, H_1 no es normal en Σ_3 y H_2 sí (índice dos)

$$N_{\Sigma_3}(H_1) = H_1 \quad N_{\Sigma_3}(H_2) = G$$

- (d) Define el concepto de grupo derivado. Calcula el del grupo diédrico de grado n , D_n (2 puntos).

Solución: El concepto puede verse en los apuntes de grupos resolubles y el ejemplo $D'_n = \langle x^2 \rangle$ puede verse en la hoja de problemas correspondiente.

- (e) Explica el significado de la unicidad en el primer teorema de estructura. Acláralo con el orden 12 (2 puntos).

Solución: Sea G un grupo abeliano suma directa de monógenos y cíclicos; entonces,

- La cantidad de sumandos directos monógenos es fija
- Si los órdenes de los cíclicos se dividen cada uno al siguiente, estos órdenes son fijos.

Un grupo abeliano de orden 12 será pues C_{12} ó $C_6 \oplus C_2$

2. Enuncia y demuestra un resultado que describa, salvo isomorfismos, los grupos de orden $2p$, p primo (10 puntos).

Solución: el caso p impar -"Todo grupo de orden $2p$ es cíclico o diédrico de grado p "- puede verse en los apuntes de orden bajo.

El caso $p = 2$ no se ha exigido. Para el navegante interesado digamos que, si hay un elemento de orden 4 tenemos C_4 . En caso contrario, tomamos dos elementos a, b de orden 2 y tenemos el grupo

$$\{1, a, b, ab\}$$

Puesto que no hay más elementos y $a \neq ba \neq b$ se tiene $ab = ba$ y se trata del grupo de Klein $C_2 \times C_2$.

3. Describe razonadamente¹ los subgrupos del grupo diédrico de grado 6, D_6 (10 puntos).

Solución: Por el teorema de Lagrange los órdenes no triviales posibles son 2,3 y 4. En primer lugar,

$$D_6 = \langle x, y \mid o(x) = 6, o(y) = 2, yxy = x^5 \rangle$$

¹El examinando podrá razonar como estime oportuno, incluso analizando los más de 4000 subconjuntos propios que posee; sin embargo, como el tiempo es limitado se sugiere que vaya describiendo los de orden más pequeño y tenga siempre muy presente los pilares del curso: el teorema de Lagrange y la teoría de Sylow. ¡Suerte!

- Subgrupos de orden 2: Los 7 generados por los 7 elementos de orden 2.

$$\langle x^3 \rangle, \langle y \rangle, \langle xy \rangle, \langle x^2y \rangle, \langle x^3y \rangle, \langle x^4y \rangle, \langle x^5y \rangle$$

- Subgrupos de orden 3: Elementos de orden 3 sólo hay 2: x^2, x^4 ; así tenemos sólo un subgrupo de orden 3:

$$\{1, x^2, x^4\}$$

- Subgrupos de orden 4: Son 2-Sylows. No pueden ser cíclicos, pues no hay elementos de orden 4. Por tanto, habrá 1 ó 3, de Klein, Si sólo hubiera uno, D_6 sería p'roducto directo de dos abelianos, luego abeliano; por tanto, debe haber 3:

$$\{1, x^3, y, x^3y\}$$

$$\{1, x^3, xy, x^4y\}$$

$$\{1, x^3, x^2y, x^5y\}$$

- Subgrupos de orden 6: $\langle x \rangle$ es un subgrupo cíclico de orden 6; no hay más cíclicos de orden 6, los demás serán D_3 ; al efecto, todos ellos contienen al único C_3 que hay en D_6 y me salen

$$\{1, x^2, x^4, y, x^2y, x^4y\}$$

$$\{1, x^2, x^4, xy, x^3y, x^5y\}$$

sólo otros dos.

4. Sea G el subgrupo de $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})[x]$ generado por $(2, x - 1, x + 3)$

Calcular sistemas generadores de G que den lugar a las descomposiciones de los dos teoremas de estructura (10 puntos).

En primer lugar,

$$G = \langle 2, x - 1, x + 3 \rangle = \langle 2, x - 1 \rangle$$

pues $x + 3 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (x - 1)$. Así, considero

$$f: \mathbf{Z}^2 \longrightarrow G$$

dado por $f(a, b) = a.2 + b(x - 1) = (2a - b) + bx$.

Su núcleo es

$$\ker f = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid 2a - b \equiv_{12} 0, b \equiv_{12} 0\}$$

Por tanto, calculamos el núcleo en $\mathbf{Z}^4$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

que resulta

$$\mathbf{Z} \langle (6, 0, 1, 0), (6, 12, 0, 1) \rangle$$

y

$$\ker f = \mathbf{Z} \langle (6, 0), (6, 12) \rangle$$

Aplicando Smith a la matriz

$$A \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$I_2 A P_{12}(-1) = \text{diag}[6, 12]$$

Por tanto, los factores invariantes de G son $(6, 12)$ y puesto que $P = I_2$ el sistema generador asociado es el de partida² $(2, x - 1)$.

Ahora, los divisores elementales de G son $(3, 2; 4, 3)$ y el sistema generador asociado al segundo teorema de estructura es

$$2.2, 3.2; 3(x - 1), 4(x - 1) = (4, 3, 3x - 3, 4x - 4)$$

²quizá algún navegante podía haber deducido esto sin tanto cálculo