7 Grupos resolubles

A cada polinomio $f \in \mathbf{Q}[x]$ se le asocia un cierto grupo G de permutaciones de sus raíces; Galois probó que es posible encontrar las raíces de f mediante extracción de radicales si y sólo si el grupo G tiene una serie de subgrupos G_i tales que $G_0 = G$, $G_r = 1$, G_{i+1} es normal en G_i y el grupo cociente G_{i+1}/G_i es abeliano.

Este importante hecho en el álgebra da relieve y nombre a los grupos que cumplen estos requisitos

Definición 7.1 *Una serie de subgrupos G_i de G se dice normal si $G_0 = G$, $G_r = 1$ y G_{i+1} es normal en G_i.*

Los grupos cociente G_i/G_{i+1} se dicen factores de la serie.

Definición 7.2 *Un grupo G se dice resoluble si posee una serie normal G_i de factores abelianos.*

Ejemplos y contraejemplos

1. Todo grupo abeliano es obviamente resoluble.
2. El grupo alternado de grado 4 admite la serie
$$1 \lhd V \lhd A_4$$
donde V es el subgrupo de orden 4 formado por los productos de transposiciones, luego es resoluble.
3. Un grupo simple no abeliano, por ejemplo A_5, no puede ser resoluble.
4. Veremos que todo sugrupo de un grupo resoluble lo es. Por tanto, S_n no es resoluble, si $n > 4$, lo que da por zanjada[1] la resolubilidad de la ecuación general de grado n

Proposición 7.3 *Sea G un grupo S y N subgrupos, éste normal. Entonces,*
i) *Si G es resoluble S lo es.*
ii) *Si G es resoluble, G/N lo es.*
iii) *Si N y G/N son resolubles, G lo es.*

Demostración:

i) Sea G_i la serie normal de G y consideremos la serie $S_i = G_i \cap S$. Es claro que $S_0 = S$ y $S_r = 1$ Ahora,
$$S_{i+1} = G_{i+1} \cap S \lhd G_i \cap S = S_i$$
y
$$S_i/S_{i+1} = (G_i \cap S)/(G_{i+1} \cap S) \leq S/(G_{i+1} \cap S) \cong SG_{i+1}/G_{i+1} \leq G_i/G_{i+1}$$
es abeliano.

[1] de manera negativa y junto con otros teoremas

ii) Sea G_i la serie normal de G y consideremos la serie $S_i = G_iN/N$ de G/N. Es claro que $S_0 = G/N$ y $S_r = 1$ Ahora,

$$G_{i+1} \lhd G_i \Longrightarrow G_{i+1}N \lhd G_iN \Longrightarrow S_{i+1} \lhd S_i$$

y

$$S_i/S_{i+1} \cong (G_iN)/(G_{i+1}N) = (G_iG_{i+1}N)/(G_{i+1}N) \cong G_i/(G_i \cap G_{i+1}N)$$

que es imagen epimorfa del grupo abeliano G_i/G_{i+1}.

iii) Sea N_i la serie normal de N y M_i/N la serie normal de G/N. Entonces,

$$1 = N_r \lhd \cdots \lhd N_0 = N = M_0 \lhd M_1 \lhd \cdots M_s = G$$

es serie normal de G de factores

$$N_i/N_{i+1} \quad M_i/M_{i+1} \cong (M_i/N)/(M_{i+1}/N)$$

abelianos.

Definición 7.4 *Dado un grupo G, se dice serie de composición a una serie normal de factores simples.*

Ejemplos y contraejemplos

1. La serie $1 \lhd C_2 \lhd V \lhd A_4$ es de composición en A_4.
2. La serie $1 \lhd A_5 \lhd S_5$ es de composición en S_5.
3. La serie $1 \lhd V \lhd A_4$ no es de composición en A_4, pues $V/1 \cong V$ no es simple.

Proposición 7.5 *Todo grupo finito admite una serie de composición.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre el orden de G. Si G es simple, tómese la serie $1 \lhd G$; en caso contrario, existe un subgrupo normal propio N. Por inducción, N y G/N poseen series de composición $\{N_i\}$ y $\{M_j/N\}$. Entonces,

$$1 = N_r \lhd \cdots \lhd N_0 = N = M_0 \lhd M_1 \lhd \cdots M_s = G$$

es serie de composición de G.

Lema 7.6 *Un grupo simple y resoluble es cíclico de orden primo.*

Demostración: Si es simple y resoluble, debe ser abeliano; no puede poseer subgrupos propios y es cíclico; finalmente su orden debe ser primo.

Proposición 7.7 *Dado un grupo finito G, son equivalentes*

i) *G es resoluble.*

ii) *Cualquier factor de composición de G es cíclico de orden primo.*

iii) *G posee una serie de composición con factores cíclicos de orden primo*

Demostración: Si G es resoluble y G_i/G_{i+1} es un factor de composición, G_i es resoluble por ser subgrupo de G y G_i/G_{i+1} por ser cociente de G_i; ahora G_i/G_{i+1} es simple y resoluble, luego es cíclico de orden primo.

7.1 La serie derivada

Asociado al concepto de grupo resoluble viene el concepto de serie derivada.

Analizando la abelianidad o no de un grupo, se trata de ver si dos elementos x e y conmutan o no; es decir, si $xy = yx$ o lo que es equivalente $(xy)(xy)^{-1} = 1$; finalmente, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = 1$.

Definición 7.1.1 *Dados $x, y \in G$ se dice*
i) *Conmutador de x e y al elemento $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.*
ii) *Subgrupo derivado de G a*

$$G' =< [x, y] \mid x, y \in G >$$

Observación 7.1.2 El cálculo de un conmutador es un problema de cálculo de inversos y multiplicación ordenada de los elementos correspondientes. El cálculo del derivado puede crear recelos a no ser por la siguiente útil

Proposición 7.1.3 *Dado un grupo G, se tiene*
i) *G' es normal en G.*
ii) *G/N es abeliano si y sólo si $G' \leq N$. En particular, G/G' es abeliano.*
iii) $G' = \bigcap \{N \trianglelefteq G \mid G/N \text{ es abeliano}\}$

Demostración:

i) Es consecuencia de que el inverso del conmutador $[x, y]$ es el conmutador $[y, x]$ y de que un conmutador $[x, y]$ se transforma en otro conmutador por conjugación:

$$[x, y]^z = z(xyx^{-1}y^{-1})z^{-1} = (zxz^{-1})(zyz^{-1})(zx^{-1}z^{-1})(zy^{-1}z^{-1}) = [x^z, y^z]$$

ii) G/N es abeliano si y sólo si $xNyN = yNxN \, \forall x, y \in G$ si y sólo si $xyN = yxN \, \forall x, y \in G$ si y sólo si $x^{-1}y^{-1}N = y^{-1}x^{-1}N \, \forall x, y \in G$ si y sólo si $xyx^{-1}y^{-1}N = N \, \forall x, y \in G$ si y sólo si $[x, y]N = N$ si y sólo si $[x, y] \in N$ si y sólo si $G' \leq N$.

iii) Es consecuencia directa de i) y ii).

Ejemplos

1. El subgrupo derivado de un abeliano es 1.
2. Si G es simple no abeliano $G' = G$. Grupos que coinciden con su derivado se dicen perfectos[2].
3. $S_n' \leq A_n$, pues S_n/A_n es de orden 2 y por tanto cíclico.
4. Si $n > 4$, el derivado de S_n es A_n, pues éste no tiene subgrupos normales.
5. $S_3' = A_3$, pues S_3 no es abeliano.
6. El derivado del grupo cuaternio Q es su (único) cíclico de orden 2, pues da cociente un grupo de orden 4, que debe ser abeliano, y Q no lo es.

Definición 7.1.4 *Dado un grupo G se dice serie derivada a $G^{(i)}$ dada por*

$$G^{(0)} = G \quad G^{(1)} = G' \quad G^{(i)} = \left(G^{(i-1)}\right)'$$

Ejemplos

1. La serie derivada de un abeliano es: $1 \lhd G$.
2. La de un simple no abeliano sólo tiene un término, que es: G.
3. Si $n > 4$, la serie derivada de S_n es: $A_n \lhd S_n$
4. La de S_3 es: $1 \lhd A_3 \lhd S_3$
5. La serie derivada del grupo cuaternio Q es: $1 \lhd C_2 \lhd Q$

Es claro, por definición, que $S \leq G \Longrightarrow S' \leq G'$. Parece ya clara la siguiente

Proposición 7.1.5 *G es resoluble si y sólo si la serie derivada acaba en* 1.

Demostración: Si G es resoluble, existe una serie normal G_i de factores abelianos. Veamos, por inducción sobre k que $G^{(k)} \leq G_k$. Al efecto, $G^{(0)} = G \leq G_0$; si $G^{(k)} \leq G_k$

$$G^{(k+1)} = (G^{(k)})' \leq (G_k)' \leq G_{k+1}$$

pues G_k/G_{k+1} es abeliano.

Recíprocamente, la serie derivada es normal y los factores

$$G^{(k)}/G^{(k+1)} = G^{(k)}/(G^{(k)})'$$

son abelianos.

[2]Existen grupos perfectos que no son simples

EJERCICIOS

1. Calcular D'_n.
2. Calcular S'_4
3. Calcular la serie derivada de los grupos simétricos, alternados y diédricos. Deducir cuáles son resolubles y cuáles no.
4. Probar que todo p-grupo finito es resoluble.
5. Probar que todo p-grupo finito admite una serie normal

$$Z_0 = 1 \lhd Z_1 \lhd \cdots \lhd Z_k \lhd \cdots \lhd Z_r = G$$

   tal que $Z_k/Z_{k-1} = Z(G/Z_{k-1})$

   Recibe el nombre de serie central ascendente[3]. Grupos en los que esta serie acaba en G reciben el nombre de grupos nilpotentes.
6. Probar que A_4 y S_3 no son nilpotentes.
7. Probar que todo grupo abeliano es nilpotente y que éstos son resolubles.

[3]superior para algunos autores