

8 Producto y suma directa de grupos

En Álgebra Lineal es habitual la consideración de los producto cartesianos $\mathbf{Q}^n, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^n$ como espacios vectoriales; así, estamos considerando el producto cartesiano como un grupo (abeliano), siendo definida la operación suma componente a componente. Para esta parte de la construcción no es necesario que los grupos sean abelianos.

Dada una familia finita de grupos $(G_1, \dots, G_n)$, consideremos el producto cartesiano

$$G = G_1 \times \dots \times G_n$$

y definamos en G una operación, componente a componente, mediante la operación de cada G_i . Como es habitual, a fin de no complicar la escritura, la operación de un grupo no se escribe y definimos

$$(x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n) = (x_1y_1, \dots, x_ny_n)$$

Es inmediato comprobar que hemos obtenido un nuevo grupo de neutro $(1_{G_1}, \dots, 1_{G_n})$, en el que el inverso de $(x_1, \dots, x_n)$ es $(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$

Definición 8.1 Dada una familia finita de grupos $(G_1, \dots, G_n)$ el grupo G anterior se dice *producto directo (externo)* de los G_i .

Asimismo, se denota por $\prod_{i=1}^n G_i$

Ejemplos

1. $\mathbf{Q}^n, \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^n$
2. $S_3 \times S_4$
3. $D_5 \times \mathbf{Z}$

Observación 8.2 Es claro que si todos los grupos son abelianos, el producto directo lo es. En este caso, suele decirse suma directa (externa) y se escribe $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$. Asimismo, es cierto que si cada factor G_i es nilpotente, resoluble el producto directo lo es; pero ésto puede que se salga de los objetivos del curso.

Por otro lado, en ocasiones se ha mencionado que si p y q son primos, el grupo cíclico de orden pq es producto directo (interno) de sus subgrupos C_p y C_q . El por qué de esta aparente confusa notación reside en la siguiente

Proposición 8.3 Sean $G = G_1 \times \dots \times G_n$, I, J dos partes complementarias de $\{1, \dots, n\}$. Entonces, G posee un subgrupo normal N isomorfo a $\prod_{i \in I} G_i$ y

$$G/N \cong \prod_{j \in J} G_j$$

Demostración: Sea $N = (x_k) \in G$ tales que $x_k = 1$ si $k \notin I$. Entonces,

$$(y_k)(x_k)(y_k)^{-1} = (y_k x_k y_k^{-1})$$

Ahora,

$$k \notin I \implies y_k x_k y_k^{-1} = y_k y_k^{-1} = 1 \implies (y_k)(x_k)(y_k)^{-1} \in N$$

Por otro lado, eliminando en cada n -tupla las componentes subindicadas por I ,

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \prod_{j \in J} G_j \\ (x_k) & \longrightarrow & (x_k) \end{array}$$

es un epimorfismo de grupos de núcleo N .

Finalmente,

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \prod_{i \in I} G_i \\ (x_k) & \longrightarrow & (x_k) \end{array}$$

es un isomorfismo.

Corolario 8.4 Sea $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ y $G_i^* = \{(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1)\}$, $i = 1, \dots, n$. Entonces, G es el producto directo (interno) de los G_i^* .

Demostración: La normalidad ha sido vista en la proposición. Que G coincide con $G_1^* \cdots G_n^*$ es inmediato y la condición sobre la intersección es obvia: sólo contendrá el $(1, 1, \dots, 1, 1)$.

Observación 8.5 En algunos contextos matemáticos se introducen los polinomios y las series formales con coeficientes enteros, racionales, reales, complejos, ... Se trata de considerar familias infinitas de enteros, racionales, reales, complejos, ... y sumarlas componente a componente. Esto y lo anterior es caso particular de lo siguiente.

Definición 8.6 Sea I un conjunto arbitrario¹ y $(G_i \mid i \in I)$ una familia de conjuntos, subindicada por I . Se dice producto cartesiano a

$$\prod_{i \in I} G_i = \{f: I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \mid f(k) \in G_k, \forall k\}$$

Teorema 8.7 Sea I un conjunto arbitrario y $(G_i \mid i \in I)$ una familia de grupos, subindicada por I . El producto cartesiano $\prod_{i \in I} G_i$ puede ser dotado de estructura de grupo. Recibe el nombre de producto directo (externo) de los grupos G_i . Además, si los G_i son abelianos, el producto directo lo es.

Demostración: Poniendo $fg(i) = f(i)g(i)$ es rutinario comprobar que se tiene un grupo de neutro la aplicación $e(i) = 1_{G_i}$. Ahora $g(i) = f(i)^{-1}$ es el inverso de cada f en el grupo.

Ejemplos

1. Si I es finito de cardinal n , $\prod_{i \in I} G_i \cong G_1 \times \cdots \times G_n$.

¹finito, numerable o no numerable.

En efecto,

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} G_i & \longrightarrow & G_1 \times \cdots \times G_n \\ f & \longrightarrow & (f(i)) \end{array}$$

es un isomorfismo, que identifica cada f con la n -tupla de sus imágenes $(f(1), \dots, f(n))$

2. Si $I = \mathbf{N}$, y $G_i = (A, +)$, $\forall i$, es el grupo aditivo de un anillo A , el producto directo $\prod_{i \in I} G_i$ es isomorfo al grupo aditivo de las series formales con coeficientes en A . En efecto,

$$\begin{array}{ccc} (\prod_{i \in I} A, +) & \longrightarrow & (A[[x]], +) \\ f & \longrightarrow & \sum f(i)x^i \end{array}$$

es un isomorfismo, que identifica cada f con la sucesión de sus imágenes $(f(1), \dots, f(n), \dots)$

Proposición 8.8 *La aplicación $\pi_k: \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow G_k$ dada por $f \longrightarrow f(k)$ es un epimorfismo de grupos que recibe el nombre de proyección canónica, en la componente k -sima.*

Demostración: Es inmediata.

Ejemplo En el ejemplo anterior de las series formales, fijado el índice k se trata de asignar a cada serie formal $\sum a_k x^k$ el coeficiente a_k de x^k .

El producto directo $\prod_{i \in I} G_i$ cumple la siguiente propiedad “universal”:

Teorema 8.9 *Si H es un grupo “cualquiera” y para cada $k \in I$, $\varphi_k: H \longrightarrow G_k$ es un homomorfismo de grupos, existe un único homomorfismo de grupos*

$$\varphi: H \longrightarrow \prod_{i \in I} G_i$$

tal que $\pi_k \circ \varphi = \varphi_k \forall k \in I$.

Demostración:

Unicidad: Sean φ y ϕ en esas condiciones.

Para cada $x \in H$,

$$\varphi(x)(k) = \pi_k(\varphi(x)) = \varphi_k(x) = \pi_k(\phi(x)) = \phi(x)(k) \implies \varphi(x) = \phi(x) \implies \varphi = \phi$$

Existencia: Para cada $x \in H$, definimos

$$\varphi(x): I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \quad \text{mediante} \quad \varphi(x)(k) = \varphi_k(x)$$

Es rutinario comprobar que φ es un homomorfismo de grupos y que, por construcción, $\pi_k \circ \varphi = \varphi_k \forall k \in I$.

Observación 8.10 Las proyecciones y la propiedad *universal* del teorema anterior determinan el producto directo salvo isomorfismos.

Teorema 8.11 Sea I un conjunto de índices, $(G_i \mid i \in I)$ una familia de grupos y G un grupo junto con una familia $(p_i: G \longrightarrow G_i \mid i \in I)$ de homomorfismos cumpliendo:

Para cada grupo H y familia $(\varphi_i: H \longrightarrow G_i \mid i \in I)$ de homomorfismos existe un único homomorfismo $\varphi: H \longrightarrow G$ tal que $p_i \circ \varphi = \varphi_i$.

Entonces,

$$G \cong \prod_{i \in I} G_i$$

Demostración:

Tomando como $H = \prod_{i \in I} G_i$ y $(\varphi_i = \pi_i \mid i \in I)$ existe un único homomorfismo de grupos

$$\prod_{i \in I} G_i \xrightarrow{\varphi} G$$

cumpliendo $p_i \circ \varphi = \pi_i$.

Tomando como H el grupo G , y como φ_i los p_i , la propiedad universal del producto directo da un único homomorfismo de grupos

$$G \xrightarrow{\phi} \prod_{i \in I} G_i$$

cumpliendo $\pi_i \circ \phi = p_i$.

Por tanto,

$$p_i \circ (\varphi \circ \phi) = p_i \quad \pi_i \circ (\phi \circ \varphi) = \pi_i$$

Puesto que

$$p_i \circ id_G = p_i \quad \pi_i \circ id_{\prod G_i} = \pi_i$$

la unicidad de los homomorfismos en el enunciado da

$$\varphi \circ \phi = id_G \quad \phi \circ \varphi = id_{\prod G_i}$$

y ambos ϕ, φ son isomorfismos, inversos el uno del otro.

Observación 8.12 Notemos que ϕ es conocida. En efecto, dado $x \in G$, sea $f(i) = p_i(x)$; así,

$$f(i) = p_i(x) = p_i \circ (\varphi \circ \phi)(x) = \pi_i \circ \phi(x) = \phi(x)(i)$$

Por tanto, $\phi(x) = f$.

Observación 8.13 No nos resulta fácil determinar explícitamente φ . Se pudiera intentar lo siguiente: dado un elemento f del producto directo, utilizando que $p_i = \pi_i \circ \phi$ es sobre, localizamos, para cada $i \in I$, $x_i \in G$ tal que $p_i(x_i) = f(i)$. Ahora bastaría reconstruir x tal que $p_i(x) = f(i)$. Ello pudiera resultar posible si sólo hay un número finito de índices i tales que $f(i) \neq 1_{G_i}$, mediante el producto de ese número finito de x_i . Esto motiva la siguiente

Definición 8.14 Dado $f \in \prod_{i \in I} G_i$, se dice soporte de f al conjunto de índices i tal que $f(i) \neq 1_{G_i}$.

Teorema 8.15 I un conjunto arbitrario y $(G_i \mid i \in I)$ una familia de grupos, subinducida por I . El subconjunto $\prod_{i \in I} G_i$ de las aplicaciones de soporte finito es un subgrupo normal del producto directo $\prod_{i \in I} G_i$. Recibe el nombre de coproducto² (externo) de los grupos G_i .

Demostración: Es claro que si f y g son de soporte finito fg lo es, y que el neutro del grupo producto directo es de soporte vacío. Ahora, para cada $h \in \prod_{i \in I} G_i$, hfh^{-1} tiene el mismo soporte que f por lo que $hfh^{-1} \in \prod_{i \in I} G_i$

Ejemplo Si $I = \mathbb{N}$, y $G_i = (A, +)$, $\forall i$, es el grupo aditivo de un anillo A , el coproducto de $\prod_{i \in I} G_i$ es isomorfo al grupo aditivo de los polinomios con coeficientes en A . En efecto,

$$\begin{array}{ccc} (\prod_{i \in I} A, +) & \longrightarrow & (A[x], +) \\ f & \longrightarrow & \sum f(i)x^i \end{array}$$

es un isomorfismo, que identifica cada f con la sucesión de sus imágenes

$$(f(1), \dots, f(n), 0, \dots)$$

Observación 8.16 Si I es finito,

$$\prod_{i \in I} G_i = \prod_{i \in I} G_i \cong G_1 \times \dots \times G_r$$

Proposición 8.17 La aplicación

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_k: G_k & \longrightarrow & \prod_{i \in I} G_i & & \\ x_k & \longrightarrow & f: & I & \longrightarrow \bigcup G_i \\ & & & k & \longrightarrow x_k \\ & & & i & \longrightarrow 1_{G_i}, i \neq k \end{array}$$

es un monomorfismo de grupos que recibe el nombre de inyección canónica, de la componente k -sima.

Brevemente, y utilizando la delta de Kronecker, $\alpha_k(x_k)(i) = x_k^{\delta_{ki}}$

Demostración: Es inmediata. Identificamos x_k con la sucesión $(1, \dots, 1, x_k, 1, \dots)$

²o producto directa débil, o suma directa (externa)

Ejemplo En el ejemplo anterior de los polinomios, fijado el índice k se trata de asignar a cada elemento a del anillo A , el monomio ax^k .

De la misma manera que un polinomio es la suma de los monomios que tienen coeficiente no nulo, un elemento del coproducto será el producto de un número finito de elementos. Es la siguiente

Proposición 8.18 Sea f de soporte finito $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ y para cada $j \in J$, sea $f_j = \alpha_j(f(j))$. Entonces,

$$f = f_{j_1} \cdots f_{j_n}$$

Demostración:

$$f_j(i) = (\alpha_j(f(j)))(i) = f(j)^{\delta_{ji}}$$

Por tanto,

$$(f_{j_1} \cdots f_{j_n})(i) = f_{j_1}(i) \cdots f_{j_n}(i) = f(j_1)^{\delta_{j_1 i}} \cdots f(j_n)^{\delta_{j_n i}} = \begin{cases} 1 & i \notin J \\ f(i) & i \in J \end{cases}$$

que es en cualquier caso el valor de $f(i)$.

Como en el caso del producto, y mediante al anterior resultado, podemos obtener para el coproducto $\coprod_{i \in I} G_i$ la siguiente propiedad “universal³”:

Teorema 8.19 Si H es un grupo abeliano y para cada $k \in I$, $\varphi_k: G_k \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, existe un único homomorfismo de grupos

$$\varphi: \coprod_{i \in I} G_i \longrightarrow H$$

tal que $\varphi \circ \alpha_k = \varphi_k$.

Demostración:

Unicidad: Sean φ y ϕ en esas condiciones.

Para cada $f \in \coprod_{i \in I} G_i$, sea $\{j_1, \dots, j_n\}$ su soporte:

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi\left(\prod_{k=1}^n f_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^n \varphi(f_{j_k}) = \prod_{k=1}^n \varphi(\alpha_{j_k}(f(j_k))) = \prod_{k=1}^n \varphi_{j_k}(f(j_k)) \\ \phi(f) &= \phi\left(\prod_{k=1}^n f_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^n \phi(f_{j_k}) = \prod_{k=1}^n \phi(\alpha_{j_k}(f(j_k))) = \prod_{k=1}^n \varphi_{j_k}(f(j_k)) \end{aligned}$$

Luego $\varphi = \phi$.

Existencia:

Sea $f \in \coprod_{i \in I} G_i$, de soporte J ; si $j \in J$, $f(j) \in G_j$ y $\varphi_j(f(j)) \in H$.

³en el universo de los grupos abelianos

Definimos

$$\varphi(f) = \prod_{j \in J} \varphi_j(f(j))$$

Veamos que φ es un homomorfismo de grupos.

Sea $\varphi(g) = \prod_{k \in K} \varphi_k(g(k))$. Añadiendo un número finito de 1_H , si necesario, podemos suponer que $J = K$. Ahora,

$$\varphi(fg) = \prod_{j \in J} \varphi_j(fg(j)) = \prod_{j \in J} \varphi_j(f(j)g(j)) = \prod_{j \in J} [\varphi_j(f(j))\varphi_j(g(j))]$$

y puesto que H es abeliano,

$$\varphi(fg) = \prod_{j \in J} [\varphi_j(f(j))\varphi_j(g(j))] = \prod_{j \in J} \varphi_j(f(j)) \prod_{j \in J} \varphi_j(g(j)) = \varphi(f)\varphi(g)$$

Finalmente, para cada $k \in I$, el soporte de $\alpha_k(x)$ es $\{k\}$, luego

$$\varphi \circ \alpha_k(x) = \varphi_k(\alpha_k(x)(k)) = \varphi_k(x) \implies \varphi \circ \alpha_k = \varphi_k$$

Observación 8.20 Las inyecciones canónicas y la propiedad *universal* del teorema anterior determinan el coproducto salvo isomorfismos.

Teorema 8.21 Sea I un conjunto de índices, $(G_i \mid i \in I)$ una familia de grupos abelianos y G un grupo abeliano junto con una familia $(\beta_i: G_i \longrightarrow G \mid i \in I)$ de homomorfismos cumpliendo:

Para cada grupo abeliano H y familia $(\varphi_i: G_i \longrightarrow H \mid i \in I)$ de homomorfismos existe un único homomorfismo $\varphi: G \longrightarrow H$ tal que $\varphi \circ \beta_i = \varphi_i$.

Entonces,

$$G \cong \coprod_{i \in I} G_i$$

Demostración:

Tomando como $H = \coprod_{i \in I} G_i$ y $(\varphi_i = \alpha_i \mid i \in I)$ existe un único homomorfismo de grupos

$$G \xrightarrow{\varphi} \coprod_{i \in I} G_i$$

cumpliendo $\varphi \circ \beta_i = \alpha_i$.

Tomando como H el grupo G , y como φ_i los β_i , la propiedad universal del coproducto da un único homomorfismo de grupos

$$\coprod_{i \in I} G_i \xrightarrow{\phi} G$$

cumpliendo $\phi \circ \alpha_i = \beta_i$.

Por tanto,

$$(\varphi \circ \phi) \circ \alpha_i = \alpha_i \quad (\phi \circ \varphi) \circ \beta_i = \beta_i$$

Puesto que

$$id_{\coprod G_i} \circ \alpha_i = \alpha_i \quad id_G \circ \beta_i = \beta_i$$

la unicidad de los homomorfismos en el enunciado da

$$\phi \circ \varphi = id_{\coprod G_i} \quad \varphi \circ \phi = id_G$$

y ambos ϕ, φ son isomorfismos, inversos el uno del otro.

Observación 8.22 Recordemos que ϕ es conocida. En efecto, dada $f \in \coprod G_i$, de soporte J , sea $x_j = \beta_j(f(j)) \forall j \in J$; así, $\phi(f) = \prod_{j \in J} x_j$.

Proposición 8.23 Sea $(N_i \mid i \in I)$ una familia de subgrupos normales de G tales que

- i) $G = \langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle$
- ii) $N_k \cap (\bigcup_{i \neq k} N_i) = 1_G$

Entonces, $G \cong \coprod_{i \in I} N_i$; G recibe el nombre de suma directa interna de los N_i .

Demostración: Notemos en primer lugar que los elementos de N_i y N_j deben conmutar por ser subgrupos normales de intersección 1.

Dado, entonces, $x \in G$ se tiene $x = x_{i_1} \cdots x_{i_r}, x_{i_k} \in N_{i_k}$. Además la factorización es única y definimos

$$\begin{array}{ccccc} \varphi: & G & \longrightarrow & \coprod_{i \in I} N_i & \\ & x_{i_1} \cdots x_{i_r} & \longrightarrow & \begin{array}{c} f: I \\ i_k \end{array} & \longrightarrow \bigcup N_i \\ & & & & x_{i_k} \end{array}$$

Recíprocamente, si f es un elemento del coproducto, su soporte es finito J , y

$$\phi(f) = \prod_{j \in J} f(j)$$

Es rutinario probar que φ y ϕ son homomorfismos inversos uno de otro.

Finalizamos el tema buscando subgrupos normales y cocientes de producto y coproducto.

Definición 8.24 Sea $(\varphi_i: G_i \longrightarrow H_i \mid i \in I)$ una familia de homomorfismos de grupos y designemos por π_i, p_i las proyecciones canónicas de los productos directos respectivos. Entonces, el (único) homomorfismo $\varphi: \prod G_i \longrightarrow \prod H_i$ tal que $p_i \circ \varphi = \varphi_i \circ \pi_i$ se dice producto directo de los φ_i . Se escribe $\varphi = \prod \varphi_i$.

Observación 8.25 Nótese que $\forall k \in I$ y $\forall f \in \prod G_i$

$$\begin{aligned} \left[\left(\prod_{i \in I} \varphi_i \right) (f) \right] (k) &= p_k \left[\left(\prod_{i \in I} \varphi_i \right) (f) \right] = \\ &= \left(p_k \circ \prod_{i \in I} \varphi_i \right) (f) = (\varphi_k \circ \pi_k)(f) = \\ &= \varphi_k(\pi_k(f)) = \varphi_k(f(k)) \end{aligned}$$

Proposición 8.26 Con la notación anterior

- i) $(\prod \varphi_i)(\prod G_i) \subseteq \prod H_i$
- ii) $\ker(\prod \varphi_i) = \prod \ker \varphi_i$. Como consecuencia, $(\prod \varphi_i)$ es mono si y sólo si φ_i lo es, para cada i .
- iii) $\text{Im}(\prod \varphi_i) = \prod \text{Im} \varphi_i$. Como consecuencia, $(\prod \varphi_i)$ es epi si y sólo si φ_i lo es, para cada i .

Como consecuencia, $(\prod \varphi_i)$ es isomorfismo si y sólo si φ_i lo es, para cada i .

Demostración:

Es consecuencia directa de la observación anterior, pues

- El soporte de $(\prod \varphi_i)(f)$ está incluido en el de f
- $(\prod \varphi_i)(f) = 1 \iff \dots \iff f(i) \in \ker \varphi_i \iff f \in \prod \ker \varphi_i$
- $g = (\prod \varphi_i)(f) \iff \dots \iff g(i) \in \text{Im} \varphi_i \iff g \in \prod \text{Im} \varphi_i$. Ahora, si cada φ_i es epi, $\text{Im}(\prod \varphi_i) = \prod G_i$; recíprocamente, dado $y \in H_k$, sea $g(j) = y^{\delta_{kj}}$ y sea $(\prod \varphi_i)(f) = g$; sea $x = f(k) \in G_k$. Entonces,

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(f(k)) = \left[\left(\prod_{i \in I} \varphi_i \right) (f) \right] (k) = g(k) = y$$

Proposición 8.27 Sea $(G_i \mid i \in I)$ una familia de grupos y, para cada i , sea N_i un subgrupo normal de G_i . Entonces,

- i) $N = \prod N_i$ es un subgrupo normal de $G = \prod G_i$ y $G/N \cong \prod (G_i/N_i)$
- ii) $N = \coprod N_i$ es un subgrupo normal de $G = \coprod G_i$ y $G/N \cong \coprod (G_i/N_i)$

Demostración:

- i) Considérese $\pi = \prod \pi_i$ donde $\pi_i: G_i \longrightarrow G_i/N_i$ y aplíquese la proposición anterior.

ii) Por la misma proposición y observación anteriores,

$$\pi|_{\prod G_i}: \prod G_i \longrightarrow \prod G_i/N_i$$

es un epimorfismo y su núcleo

$$\ker(\pi|_{\prod G_i}) = (\ker \pi) \cap \left(\prod G_i\right) = \left(\prod N_i\right) \cap \left(\prod G_i\right) = \left(\prod N_i\right)$$

EJERCICIOS

1. Probar que S_3 y $C_{p^n, p}$ primo no son producto directo de sus subgrupos propios.
2. Probar que $(C_3 \times C_2) \times C_2 \cong C_6 \times C_2$.
3. Sea G un grupo abeliano y $\{x_1, \dots, x_r\}$ un sistema generador de G tal que $o(x_i) = p$, $i = 1, \dots, r$. Probar que $G \cong \mathbf{Z}/\mathbf{Z}_p \times \dots \times \mathbf{Z}/\mathbf{Z}_p$.
4. Probar que

$$G = G_1 \times \dots \times G_n \implies G' = G'_1 \times \dots \times G'_n$$

Dar un ejemplo de grupo perfecto ($G = G'$) no simple

5. Pruébese que el producto directo de n grupos resolubles, lo es.
6. Dar un ejemplo de 4 grupos A, B, C, D tales que

$$(A \times B) \cong (C \times D)$$

pero

$$A \not\cong C, D \quad B \not\cong C, D$$

7. Sean $M, N \triangleleft G$. Probar que $G/(M \cap N)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/M \times G/N$. Deducir que si G/M , G/N son abelianos, nilpotentes, resolubles, $G/(M \cap N)$ lo es.
8. Sea $N \triangleleft G = G_1 \times \dots \times G_n$. Probar que $N \leq Z(G)$ o corta no trivialmente a algún G_i .
9. Dar un ejemplo de un producto directo $A \times B$ con un subgrupo normal $N \neq 1$ que corte trivialmente a A y a B .
10. Dar ejemplos que contradigan las siguientes afirmaciones:

$$A \cong B \quad C \cong D \implies A/C \cong B/D$$

$$A \cong B \quad A/C \cong B/D \implies C \cong D$$

$$C \cong D \quad A/C \cong B/D \implies A \cong B$$

11. Dar un ejemplo (existe al menos uno muy sencillo) para probar que no se puede suprimir la hipótesis de H abeliano en el teorema 8.21