6 Grupos de orden pequeño

Una de las aplicaciones inmediatas de los teoremas de Sylow es la clasificación rápida de los grupos de orden ≤ 15 .

Proposición 6.1 *Si $|G| = 2p$, con p primo impar, G es cíclico o (isomorfo al grupo) diédrico.*

Demostración: Analicemos los subgrupos de Sylow; es claro que sólo hay un p -Sylow C_p que es normal. Ahora, 2-Sylows puede haber 1,3,... Si G es abeliano sólo hay 1 2-Sylow, éste es normal y G es producto directo de C_p y C_2 , que es el cíclico de orden $2p$. En caso contrario, sea x el generador del único p -Sylow e y el generador de un C_2 . Por el teorema de Lagrange, $y \notin \langle x \rangle$ y se tiene, $\langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle \subseteq G$, luego $G = \langle x, y \rangle$. Ahora,

$$yx \notin \langle x \rangle \stackrel{\text{Lagrange}}{\implies} o(yx) = 2 \implies yxyx = 1 \implies yxy = x^{-1}$$

Por tanto,

$$G = \langle x, y \mid o(x) = p, o(y) = 2, yxy = x^{-1} \rangle$$

Definición 6.2 *Se dice grupo cuaternio al subgrupo Q de $\text{Gl}(2, \mathbf{C})$ generado por las matrices*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Proposición 6.3 *El grupo cuaternio es no abeliano, y sus generadores cumplen*

$$o(J) = o(L) = 4 \quad J^2 = L^2 = -I_2 \quad L JL^{-1} = J^3$$

Por tanto, es un grupo de orden 8. Más precisamente, poniendo $M = JL$,

	I_2	J	$-I_2$	$-J$	L	M	$-L$	$-M$
I_2	I_2	J	$-I_2$	$-J$	L	M	$-L$	$-M$
J	J	$-I_2$	$-J$	I_2	M	$-L$	$-M$	L
$-I_2$	$-I_2$	$-J$	I_2	J	$-L$	$-M$	L	M
$-J$	$-J$	I_2	J	$-I_2$	$-M$	L	M	$-L$
L	L	$-M$	$-L$	M	$-I_2$	J	I_2	$-J$
M	M	L	$-M$	$-L$	$-J$	$-I_2$	J	I_2
$-L$	$-L$	M	L	$-M$	I_2	$-J$	$-I_2$	J
$-M$	$-M$	$-L$	M	L	J	I_2	$-J$	$-I_2$

Demostración: Que Q no es abeliano es consecuencia de que

$$JL = M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad LJ = -M$$

El polinomio mínimo de J y L es $x^2 + 1$; por tanto, $J^2 = -I_2 = L^2$, lo que da la afirmación sobre los órdenes de J y L . La última relación de los generadores es de comprobación directa. Ahora,

$$I_2, J, -I_2 = J^2, L, JL = M, ML = -J, JM = -L, LJ = M$$

son 8 matrices distintas de Q . Veamos que no hay más:

Si $N \in Q$,

$$N = J^{r_1} L^{s_1} \dots J^{r_k} L^{s_k} \quad r_j = 0, \dots, 3, s_j = 0, \dots, 3$$

Puesto que $LJL^{-1} = J^{-1}$, y $L^2 = J^2$, $N = J^k L$ ó $N = J^k$ y se tiene

$$G = \{I_2, J, J^2, J^3 = -J, L, JL, J^2L = -L, J^3L = -M\}$$

Comprobar que la tabla es la propuesta, es cuestión de operar matrices.

Nótese que la tabla es:

	I_2	J	J^2	J^3	L	JL	J^2L	J^3L
I_2	I_2	J	J^2	J^3	L	JL	J^2L	J^3L
J	J	J^2	J^3	I_2	JL	J^2L	J^3L	L
J^2	J^2	J^3	I_2	J	J^2L	J^3L	L	JL
J^3	J^3	I_2	J	J^2	J^3L	L	JL	J^2L
L	L	J^3L	J^2L	JL	J^2	J	I_2	J^3
JL	JL	L	J^3L	J^2L	J^3	J^2	J	I_2
J^2L	J^2L	JL	L	J^3L	I_2	J^3	J^2	J
J^3L	J^3L	J^2L	JL	L	J	I_2	J^3	J^2

Lema 6.4 Si todo elemento de G es de orden 2, G es abeliano.

Demostración:

$$x(xy)y = x^2y^2 = 1 = (xy)(xy) = x(yx)y \implies xy = yx$$

Proposición 6.5 Si G es un grupo no abeliano de orden 8, G es (isomorfo al grupo) diédrico o cuaternio.

Demostración: Por el lema y la hipótesis de no conmutatividad existe un elemento x de orden 4. Ahora, existe necesariamente otro elemento $y \notin \langle x \rangle$. Como en la proposición anterior, $\langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle \subseteq G$, luego $G = \langle x, y \rangle$.

Si $o(y) = 2$, por ser G no abeliano y $\langle x \rangle$ de índice 2, $x \neq yxy \in \langle x \rangle$. Entonces, por órdenes, $yxy = x^3 = x^{-1}$ y G es isomorfo al diédrico de grado 4.

En caso contrario, $o(y) = 4$ e $yxy^{-1} = x^{-1}$. Por otro lado,

$$|G / \langle x \rangle| = 2 \implies y^2 \in \langle x \rangle$$

Por órdenes, $y^2 = x^2$. En definitiva, la tabla de G es

	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
1	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
x	x	x^2	x^3	1	xy	x^2y	x^3y	y
x^2	x^2	x^3	1	x	x^2y	x^3y	y	xy
x^3	x^3	1	x	x^2	x^3y	y	xy	x^2y
y	y	x^3y	x^2y	xy	x^2	x	1	x^3
xy	xy	y	x^3y	x^2y	x^3	x^2	x	1
x^2y	x^2y	xy	y	x^3y	1	x^3	x^2	x
x^3y	x^3y	x^2y	xy	y	x	1	x^3	x^2

la *misma* que la del cuaternio.

Observación 6.6 Tenemos los grupos de orden 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Los no abelianos de orden 8. Los de orden 9 son C_9 ó $C_3 \times C_3$; conocemos los de orden 10 y 14; los de orden 11, 13 y 15 son todos cíclicos. Veamos los no abelianos de orden 12. Conocemos el alternado de grado 4 y el diédrico de grado 6. Estos no son isomorfos pues A_4 no posee subgrupos de orden 6 y D_6 sí. Hay (sólo) otro más. Necesitamos unos lemas

Lema 6.7 Si $G = M \times N$ con M, N abelianos, G es abeliano.

Demostración: Dados $m, n \in M, N$, $mnm^{-1}n^{-1} \in M \cap N = 1$. Por tanto, $mn = nm$ y

$$xy = (m_1n_1)(m_2n_2) = m_1(n_1m_2)n_2 = \dots = (m_2n_2)(m_1n_1) = yx$$

Lema 6.8 A_4 es el único subgrupo de orden 12 de S_4 .

Demostración:

Sea H de orden 12 distinto de A_4 . Entonces, $A_4 \subsetneq HA_4$ y así, $HA_4 = S_4$ tiene orden 24 y $|H \cap A_4| = 144/24 = 6$, lo que es imposible.

Lema 6.9 Si M y N son subgrupos normales de G entonces, MN lo es.

Demostración: Dados $x \in MN$, $y \in G$

$$yxy^{-1} = y(mn)y^{-1} = (ymy^{-1})(yny^{-1}) = m_1n_1 \in MN$$

Teorema 6.10 Los únicos grupos no abelianos de orden 12 son (isomorfos a) A_4 , D_6 y

$$\langle x, y \mid o(x) = 6, y^2 = x^3, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

Demostración: Existen 2-Sylows de orden 4 y 3-Sylows que son C_3 ; sea P un 3-Sylow.

Mediante la acción de G sobre las clases a izquierda módulo P , $G/\text{Core}(P)$ es isomorfo a un subgrupo de S_4 .

Si $\text{Core}(P)$ es 1, G es isomorfo a un subgrupo de orden 12 de S_4 , es decir, G es isomorfo a A_4 .

Podemos suponer que $\text{Core}(P)$ no es 1.

1. Hay 3 2-Sylows y un único 3-Sylow

En efecto, $\text{Core}(P)$ es P y éste es normal. Si hubiera un sólo 2-Sylow, sería también normal y G producto directo de grupos abelianos, luego abeliano. Por tanto, debe haber 3 2-Sylows.

2. G posee un elemento de orden 6

G actúa por conjugación sobre los elementos de P , siendo el núcleo de la acción $C_G(P)$. Por tanto, $G/C_G(P)$ es isomorfo a un subgrupo de S_3 . Puesto que el 1 es siempre fijo por la acción, se trata de 1, C_3 ó C_2 . Si fuera C_3 , $C_G(P)$ sería un 2-Sylow, que sería normal y único. Lo mismo ocurriría si fuera 1. Por tanto, $G/C_G(P)$ es C_2 .

Así, $C_G(P)$ es de orden 6 y tiene un elemento a de orden 2. Pongamos $P = \langle b \rangle$ y $x = ab$. Puesto que a y b conmutan, x está en el grupo abeliano $\langle a, b \rangle$ y su orden es 6.

3. $\exists y \in G \setminus \langle x \rangle \mid G = \langle x, y \rangle = \{1, x, x^2, \dots, x^5, y, xy, x^2y, \dots, x^5y\}$

Puesto que, $\langle x \rangle$ es de índice 2, es normal en G ; así, existe $y \notin \langle x \rangle$ tal que $G = \langle x \rangle \langle y \rangle$.

Ahora $1, x, x^2, \dots, x^5, y, xy, x^2y, \dots, x^5y$ son todos distintos y

$$G = \{1, x, x^2, \dots, x^5, y, xy, x^2y, \dots, x^5y\}$$

Ahora $yx \notin \langle x \rangle \implies yx = x^r y \implies yxy^{-1} = x^r$; procedamos a calcular r .

4. $yxy^{-1} = x^{-1}$

yxy^{-1} es un elemento de orden 6 diferente de x , pues G no es abeliano; así, $yxy^{-1} = x^{-1}$.

Finalmente para completar la tabla se tiene

$$x^r x^s = x^{r+s}, x^r x^s y = x^{r+s} y$$

$$x^r y x^s = x^r y x^s y^{-1} y = x^r (x^s)^{-1} y, x^r y x^s y = x^r y x^s y^{-1} y y = x^r (x^s)^{-1} y^2$$

Basta conocer y^2

5. $y^2 = 1, x^3$

$y^2 \in \langle x \rangle$, ya que éste es de índice 2; además, $o(y) \neq 3$, pues sólo hay un 3-Sylow. Posibilidades:

- $y^2 = 1, x^3$
- $y^2 = x, x^5 \implies$

$$y^6 = x^3 \neq 1, y^4 = x^2, x^4 \neq 1 \implies o(y) = 12 \implies G \cong C_{12}$$

- $y^2 = x^2, x^4 \implies y^6 = 1$; por tanto, $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ son distintos cíclicos de orden 6 en G ; como sólo hay un C_3 , G posee, al menos, dos C_2 distintos; por unicidad de cada C_2 en C_6 , los C_2 son normales en G y, de acuerdo con el lema, el 4-grupo de Klein es normal en G , lo que contradice la existencia de 3 2-Sylows.

6. Tesis

Si $y^2 = 1$, G es isomorfo al diédrico de grado 6 En caso contrario,

$$G = \langle x, y \mid o(x) = 6, y^2 = x^3, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

Basta notar que estas relaciones dan una única tabla del grupo.

Los próximos ejercicios utilizan el concepto de producto directo interno de subgrupos.

Proposición 6.11 Sean $S_i \triangleleft G, i = 1 \dots, n$. Entonces,

$$S_1 \cdots S_n = \{s_1 \cdots s_n \mid s_i \in S_i\}$$

es un subgrupo normal de G que se dice subgrupo producto de los S_i .

Demostración: Por inducción sobre n , es conocido el caso $n = 2$; si $n > 2$, $T = S_1 \cdots S_{n-1}$ es un subgrupo normal de G , y por el caso $n = 2$, TS_n lo es.

Definición 6.12 Sean $S_i \triangleleft G, i = 1 \dots, n$; el producto $S_1 \cdots S_n$ se dice directo (interno), si

$$S_i \cap \prod_{j \neq i} S_j = 1$$

Se escribe $S_1 \times \cdots \times S_n$.

Proposición 6.13 $|S_1 \cdots S_n|$ es divisor de $|S_1| \cdots |S_n|$

Demostración: Por inducción sobre n , es conocido el caso $n = 2$. Para $n > 2$, $|S_1 \cdots S_n|$ divide a $|S_1| |S_2 \cdots S_n|$ Basta aplicar inducción.

Proposición 6.14 $|S_1 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \times \cdots \times |S_n|$

Demostración: Por inducción sobre n , el caso $n = 1$ es obvio; si $n > 1$,

$$|S_1 \times \cdots \times S_n| = \frac{|S_1| |S_2 \times \cdots \times S_n|}{|S_1 \cap \prod_{j>1} S_j|} = |S_1| |S_2 \times \cdots \times S_n|$$

Basta aplicar inducción.

EJERCICIOS

1. Clasificar los grupos de orden 4.
2. Probar que el grupo cuaternio tiene exactamente tres subgrupos cíclicos de orden 4 y un único subgrupo cíclico de orden 2, que es el centro.
3. Probar que hay, salvo isomorfismos, 3 grupos abelianos de orden 8:

$$C_8 \quad C_4 \times C_2 \quad C_2 \times C_2 \times C_2$$

4. Probar que hay, salvo isomorfismos, 2 grupos abelianos de orden 12:

$$C_{12} \quad C_6 \times C_2$$

5. Probar que en un p -grupo G todo subgrupo normal (no trivial) corta no trivialmente al centro.
6. Probar que un grupo de orden p^m posee un subgrupo normal de orden p^r , $r = 0, \dots, m$
7. Probar que todo p -subgrupo normal está incluido en cualquier p -Sylow.
8. Probar que G es producto directo de sus p -subgrupos de Sylow, para todod p si y sólo si cada p -subgrupo de Sylow es normal. Grupos finitos en estas condiciones se llaman nilpotentes.
9. Probar que si P es un p -Sylow de G y N es normal:

(a) PN/N es p -Sylow de G/N

(b) $P \cap N$ es p -Sylow de N

(c) $N_G(P)N/N = N_{G/N}PN/N$