3 Grupos diédricos

A continuación vamos a estudiar un subgrupo del grupo simétrico que tiene una presentación geométrica clásica: el grupo de las simetrías de un polígono regular de n lados.

Definición 3.1 *Se dice grupo diédrico de grado n, $(n \geq 3)$ al subgrupo D_n de S_n generado por el n-ciclo $c = (1, 2, \ldots, n)$ y la permutación*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & n-2 & \cdots & n+2-i & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_n = < c, \sigma >$$

Observación 3.2 Este grupo tiene diferentes *presentaciones*. La más clásica es el grupo de las simetrías de un polígono regular de n lados; equivalentemente, se trata del subgrupo de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{R})$ generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha = \frac{2\pi}{n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Asimismo puede verse como el subgrupo de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{C})$ generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}, \alpha = \frac{2\pi}{n} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las siguientes notas tratan de justificarlo.

Teorema 3.3 *Sea $n \geq 3$; si $G = < x, y >$ con $o(x) = n$, $o(y) = 2$, $yxy = x^{-1}$ entonces,*

$$G = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y\}$$

un grupo con $2n$ elementos.

Demostración: Notemos que

$$x^k y^j = x^r y^s \Longrightarrow x^{k-r} = y^{s-j}$$

Por tanto, $x^{k-r} = 1 = y^{s-j}$ ó

$$x^{k-r} = y \Longrightarrow x^{k-r+1} = xy = yx^{-1} = x^{k-r}x^{-1} = x^{k-r-1} \Longrightarrow x = x^{-1} \Longrightarrow o(x) = 2$$

que contradice $n \geq 3$.

De esta manera, $n \mid k - r, 2 \mid s - j$. Luego $k \equiv r \mod n$ y $j \equiv s \mod 2$. Por tanto, G contiene, al menos, los $2n$ elementos de

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y\}$$

Recíprocamente, si $z \in G$,

$$z = x^{r_1}y^{s_1} \cdots x^{r_k}y^{s_k} \quad r_j = 0, \ldots, n-1 \quad s_j = 0, 1$$

Puesto que $yxy = x^{-1}$,

$$z = \begin{cases} x^k y & \text{si} \quad \sum s_j \quad \text{es} \quad \text{impar} \\ x^k & \text{si} \quad \sum s_j \quad \text{es} \quad \text{par} \end{cases}$$

y se tiene

$$G = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{n-1}y\}$$

Corolario 3.4 *El grupo diédrico D_n cumple*
i) $o(c) = n$, $o(\sigma) = 2$ *y* $\sigma c \sigma = c^{-1}$.
ii) $|D_n| = 2n$.
iii) *Si* $G =< x, y >$ *con* $o(x) = n$, $o(y) = 2$, $yxy = x^{-1}$ *entonces,* $G \cong D_n$.
Demostración: El primer item es consecuencia directa de la descomposición

$$\sigma = (2, n)(3, n-1) \cdots (i, n-i+2) \cdots (k, n-k+2)$$

donde $k = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ya que entonces,

$$\sigma c \sigma = (1, n, n-1, \ldots, 3, 2) = c^{n-1} = c^{-1}$$

El segundo item es consecuencia directa del primero y el teorema.
Para el tercero, sea $f\colon D_n \longrightarrow G$ dado por $f(c^k \sigma^j) = x^k y^j$. Por el teorema, f es una aplicación biyectiva y, debido a las relaciones idénticas que cumplen los generadores de ambos grupos, es claro que f es homomorfismo.

Observación 3.5 Es cuetión de multiplicar matrices comprobar que los subgrupos citados de $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{R})$ y $\mathrm{Gl}(2, \mathbf{C})$ satisfacen las relaciones de 3.4.*iii*) y son isomorfos a D_n.

Definición 3.6 *Se dice simetría de un polígono regular de* n *lados a un movimiento del plano que permute sus vértices.*

Lema 3.7 *Un movimiento es una simetría de un polígono regular de* n *lados si y sólo si el movimiento transforma el polígono en sí mismo.*
Demostración:
$\Longrightarrow$: Dado un lado del polígono, sus vértices son otros dos vértices y por distancias serán consecutivos; puesto que un movimiento es afinidad conserva las razones simples y los puntos del lado origen se transforman en los del lado imagen.
$\Longleftarrow$: Recíprocamente, dados dos vértices consecutivos el lado que forman se transforma en un segmento de la misma medida, todos cuyos puntos pertenecen al polígono, luego es un lado del polígono. Por distancias, las imágenes de los vértices del lado antiguo son los vértices del lado nuevo. Que se obtiene una permutación de vértices es consecuencia de que los movimientos son aplicaciones biyectivas.

Corolario 3.8 *Las simetrías de un polígono regular de* n *lados son un subgrupo del grupo afín del plano, que es isomorfo a* D_n. *Se dice grupo del polígono de* n *lados; grupo del triángulo, del cuadrado,...*

Demostración:
Dadas dos simetrías del polígono, su composición es un movimiento, que permutará sus vértices luego es una simetr ía; por otro lado, el movimiento inverso de una simetría permuta nuevamente los vértices, y es otra simetría. En consecuencia, la primera afirmación está comprobada.

Para la segunda, consideremos el giro c de ángulo $2\pi/n$ y centro el de la circunferencia circunscrita al polígono, y la simetría[1] σ de eje el diámetro de la citada circunferencia que pase por uno de sus vértices. Entonces, es claro que $o(c) = n$ y $o(\sigma) = 2$. Para ver que, $\sigma c\sigma = c^{-1}$ es suficiente ver que ambos movimientos coinciden sobre 3 vértices consecutivos del polígono, pues constituyen una referencia afín del plano. Numéremoslos $v_1, v_2, v_3, \dots$ de forma que $c(v_i) = v_{i+1}, i < n$ y v_2 sea el vértice por el que pasa el diámetro. Entonces,

$$\sigma c\sigma(v_2) = \sigma c(v_2) = \sigma v_3 = v_1 = c^{-1}(v_2)$$

Si $n > 4$

$$\sigma c\sigma(v_1) = \sigma c(v_3) = \sigma(v_4) = v_n = c^{-1}(v_1)$$

$$\sigma c\sigma(v_3) = \sigma c(v_1) = \sigma(v_2) = v_2 = c^{-1}(v_3)$$

Los casos $n = 3, 4$ se obtienen fácilmente.
Por otro lado, una simetría cualquiera deja fijo el centro del polígono por equidistar de tres vértices consecutivos. Así, su ecuación, respecto un sistema de referencia ortonormal con origen en dicho centro y primer eje el citado diámetro, es de la forma $Y = AX$ y $A^tA = I_2$. Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1 \quad ac + bd = 0$$

Luego $a = \cos\alpha$, $c = \pm b = \sin\alpha$. Si $c = b$, $a = -d$ y si $c = -b$, $a = d$. Por tanto, A es una de

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La primera transformación es el giro de centro el origen y ángulo α; por tanto,

$$\alpha = (2k\pi)/n, k = 0, 1, \dots, n-1$$

y se trata de c^k. La segunda transforma un vértice en su simétrico axial y, después, éste es girado un ángulo α; como debe ser un nuevo vértice

$$\alpha = (2k\pi)/n, k = 0, 1, \dots, n-1$$

En definitiva, la simetría es $c^k\sigma$.

[1] axial ortogonal

EJERCICIOS

En los próximos ejercicios x, y designarán los generadores de orden n y 2 de D_n.

1. Probar que
$$S_3 =< \sigma, \tau \mid o(\sigma) = 3, o(\tau) = 2, \tau\sigma\tau = \sigma^2 >$$

2. Probar que $< x >$ es normal en D_n. Describir el grupo cociente.

3. Probar que los elementos de D_n de la forma $x^k y$ son de orden 2.

4. Probar que para cada divisor k de n, distinto de 2, D_n tiene un único subgrupo cíclico de orden k. Probar además que dicho subgrupo es normal.

5. Probar que para cada divisor k de n, distinto de 2, D_n contiene una copia[2] de D_k.

6. Probar que la conjugación es un automorfismo.

7. Probar que
$$x(x^k y)x^{-1} = x^{k+2} y \quad k = 0, \ldots, n-2$$
$$x(x^{n-1} y)x^{-1} = x\, y$$

8. Probar que si n es impar, D_n posee exactamente n subgrupos de orden 2, ninguno de ellos normal.

9. Probar que si n es par, D_n posee $n+1$ subgrupos de orden 2, uno de ellos normal y los demás no.

10. Describir los subgrupos de D_3 y D_4.

11. Se dice centro de un grupo a
$$\mathbf{Z}(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$$
Probar que el centro de un grupo es invariante por automorfismos, y, como consecuencia, es normal.

12. Describir el centro del grupo diédrico de grado n.

13. Utilizando la relación $x(x^k y)x^{-1} = x^{k+2}y$, probar que si n es impar los únicos subgrupos normales de D_n son los de C_n, y que si n es par los únicos subgrupos normales de D_n fuera de C_n son los diédricos de grado $n/2$,
$$< x^2, y > \quad < x^2, xy >$$

[2] un subgrupo isomorfo a D_k