4 Acción de un grupo sobre un conjunto

Aunque esta lección tiene entidad en sí misma con un contenido claramente geométrico, su inclusión en este curso es claramente instrumental a fin de exponer una de las actuales versiones de la teoría de Sylow.
Dado un conjunto C denotamos mediante $\mathcal{B}(C)$ al grupo[1] de las biyecciones de C en sí.
Si C es finito, digamos $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, nótese que se trata de un grupo isomorfo a S_n mediante la identificación

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{B}(C) & \longrightarrow & S_n \\ \beta & \longrightarrow & \binom{i}{j} \quad \text{donde} \quad \beta(c_i) = (c_j) \end{array}$$

Definición 4.1 *Una acción de un grupo G sobre un conjunto C es un homomorfismo*

$$\varphi \colon G \longrightarrow \mathcal{B}(C)$$

A continuación expondremos una serie de ejemplos, siendo el primero obvio y el segundo el que da origen al concepto.

Ejemplos

1. Obviamente, cada subgrupo G de S_n actúa sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$, tomando φ la inclusión.

2. El grupo de las simetrías de un polígono regular de n lados actúa sobre los vértices de dicho polígono.

3. Cada grupo G actúa sobre sí mismo por traslación a izquierda

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi\colon G & \longrightarrow & \mathcal{B}(G) & & \\ g & \longrightarrow & \varphi(g)\colon G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longrightarrow & gx \end{array}$$

4. Cada grupo G actúa sobre sí mismo por traslación a derecha

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi\colon G & \longrightarrow & \mathcal{B}(G) & & \\ g & \longrightarrow & \varphi(g)\colon G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longrightarrow & xg^{-1} \end{array}$$

5. Si N es un subgrupo normal de G, éste actúa sobre N por conjugación

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi\colon G & \longrightarrow & \mathcal{B}(N) & & \\ g & \longrightarrow & \varphi(g)\colon N & \longrightarrow & N \\ & & x & \longrightarrow & gxg^{-1} \end{array}$$

6. Si $H \leq G$ y φ es una acción de G, $\varphi|_H$ es una acción de H.

[1] con la composición de aplicaciones

7. Si $H \leq G$, y representamos por G/H el conjunto de clases a izquierda de H en G,

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon G & \longrightarrow & \mathcal{B}(G/H) \\ g & \longrightarrow & \begin{array}{rcl} \varphi(g)\colon G/H & \longrightarrow & G/H \\ xH & \longrightarrow & gxH \end{array} \end{array}$$

es una acción de G que se dice representación por permutaciones de G en las clases laterales de H.

8. Si $H \subseteq G$, G actúa sobre el conjunto $S = \{J \subseteq G \mid |J| = |H|\}$mediante

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon G & \longrightarrow & \mathcal{B}(S) \\ g & \longrightarrow & \begin{array}{rcl} \varphi(g)\colon S & \longrightarrow & S \\ J & \longrightarrow & gJg^{-1} \end{array} \end{array}$$

9. El espacio vectorial V asociado a un espacio afín E actúa sobre E mediante

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon V & \longrightarrow & \mathcal{B}(E) \\ v & \longrightarrow & \begin{array}{rcl} \varphi(v)\colon E & \longrightarrow & E \\ P & \longrightarrow & P+v \end{array} \end{array}$$

Los axiomas de espacio afín garantizan que $\varphi(v)$ es una biyección y que φ es un homomorfismo.

De hecho, el ejemplo anterior es general

Proposición 4.2 *G actúa sobre C si y sólo si existe*

$$\begin{array}{rcl} (*)\colon G \times C & \longrightarrow & G \\ (g, c) & \longrightarrow & g * c \end{array}$$

tal que

$$1_G * c = c,\ \forall c \in C$$

$$(g_1 g_2) * c = g_1 * (g_2 * c)\ \forall c \in C$$

Demostración: Se propone como ejercicio.

Notación 4.3 Debido al resultado anterior, cuando no hay lugar a confusión, la acción $\varphi(g)(e)$ se abrevia mediante ge.

Definición 4.4 *Se dice núcleo de una acción al del homomorfismo correspondiente. Una acción se dice fiel*[2] *si su núcleo es 1_G.*

Ejemplos Las acciones 1,2, 3 y 4 son fieles. El núcleo de la acción 5, para $N = G$ es el centro $\mathbf{Z}(G)$ del grupo, y el de la acción 7 es $\bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$, subgrupo que recibe el nombre de *core* de H.

Las acciones anteriores darán lugar a demostraciones sencillas de importantes resultados en teoría de grupos.

[2] para algunos autores efectiva

Proposición 4.5 (Cayley) *Todo grupo finito de orden n es isomorfo a un subgrupo de S_n.*
Demostración: Considérese la acción fiel por traslación, y la observación previa a la definición 4.1.

Otra acción importante es la acción por conjugación sobre los subconjuntos de un cierto tamaño de G. En esta acción el concepto de relieve parte de la consideración de

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

En general se tiene la siguiente

Proposición 4.6 *Dada una acción φ de G sobre C y un elemento fijo $c \in C$ el conjunto*

$$\{g \in G \mid \varphi(g)(c) = c\}$$

es un subgrupo de G que se dice estabilizador de c en G, y se escribe G_c.
Demostración: Se propone como ejercicio.

Ejemplos

1. Dado $x \in G$ el estabilizador en la acción por conjugación es

   $$\{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$

   Se dice centralizador de x en G y se escribe $C_G(x)$.

2. Dado un subconjunto H de G el estabiloizador de la acción por conjugación sobre los subconjujtos de tamaño $|H|$ es

   $$\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

   Se dice normalizador de H en G y se escribe $N_G(H)$.

Observación 4.7 La acción del ejemplo 5, para $N = G$, es caso particular de la 8, así como el ejemplo 1 es caso particular del 2; se detallan separadamente porque ambos subgrupos $N_G(H)$ y $C_G(x)$ juegan un papel destacado en teoría de grupos finitos.
Del primer caso vamos a obtener ya un resultado notable: el centro de un grupo G de orden potencia de primo es distinto del 1_G.

Debemos introducir el concepto de órbita; se trata de un concepto, en cierta manera ligado al de estabilizador. Fijémonos en la acción por conjugación sobre los subconjuntos de tamaño fijo. Una pregunta clave en teoría de grupos es: dados $|H| = |J|$, ¿existe $g \in G$ tal que $J = gHg^{-1}$?
Desde el punto de vista de la acción por conjugación, se trata de averiguar si H y J son puntos movidos (el uno al otro) por (la acción d)el grupo G. Se llega de manera natural a la siguiente

Definición 4.8 *Dada una acción de G sobre C dos puntos $c, d \in C$ se dicen equivalentes si existe g in G tal que $gc = d$.*

Proposición 4.9 *La relación anterior es de equivalencia en C.*
Demostración: Se propone como ejercicio.

Definición 4.10 *Dada una acción de G sobre C , se dice órbita de G en C a cada una de las clases de equivalencia en la relación anterior.*

Nótese que, para cada $c \in C$ la órbita que contiene a c es

$$\{gc \mid g \in G\}$$

Se escribe Gc. La órbita de un elemento $x \in G$ en la acción por conjugación es decir, el conjunto de elementos conjugados a uno dado, se dice clase de conjugación de x.

Definición 4.11 *Un grupo G se dice transitivo*[3] *si existe una única órbita.*

Ejemplos Las acciones de los ejemplos 2,3,4,7,y 9 son transitivas.

Observación 4.12 La búsqueda de subgrupos de un determinado orden puede realizarse de la siguiente manera: Se localiza uno de ellos y se describen todos sus conjugados. Habremos terminado la búsqueda si la acción de G por conjugación es transitiva.
La relación entre los conceptos de órbita y estabilizador es

Proposición 4.13 $[G : G_c] = |Gc|$.
Demostración: Estableceremos una biyección entre la órbtita Gc de c y las clases a izquierda de G_c en G:

$$\begin{array}{ccc} Gc & \longrightarrow & G/Gc \\ gc & \longrightarrow & gG_c \end{array}$$

Se trata de una aplicación inyectiva, pues,

$$gc = xc \iff x^{-1}gc = c \iff x^{-1}g \in G_c \iff gG_c = xG_c$$

Siendo obvio que es sobre, se tiene una biyección.

Corolario 4.14 (Ecuación de las clases)

$$|G| = |\mathbf{Z}(G)| + \sum_{x \in S} [G : C_G(x)]$$

donde S es un sistema de representantes de las clases de conjugación con más de un elemento.
Demostración: Considerando la acción por conjugación, la suma de los tamaños de las órbitas es $|G|$. Ahora bien, $G_x = C_G(x)$ y el tamaño de la órbita de x es $[G : C_G(x)]$. Basta notar que la órbita de y tiene sólo un elemento si y sólo si $gyg^{-1} = y$, $\forall g \in G$, si y sólo si $y \in \mathbf{Z}(G)$.

Corolario 4.15 *El centro de un grupo finito G de orden potencia de primo es distinto del 1_G.*
Demostración: Sea $n = |\mathbf{Z}(G)|$. Entonces, la ecuación de las clases da

$$p^m = n + \sum p^{m_i}$$

Por tanto, $p \mid n$ y $n > 1$.

[3] debería decirse que *actúa* transitivamente

EJERCICIOS

1. Compruébese que las acciones de los ejemplos 3,4,7 y 8 son efectivamente homomorfismos de grupos.
2. Demuéstrense los resultados 4.2, 4.6 y 4.9
3. Dados dos subconjuntos A, B de un grupo G definimos

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

   Se pide:

   (a)
$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

   (b) Probar que AB es subgrupo de G si y sólo si $AB = BA$.

   (c) Si A o B son normales en G, AB es subgrupo de G

4. Decimos que G es producto directo de sus subgrupos A y B si A y B son normales en G, $G = AB$ y $A \cap B = 1_G$. Probar

   (a) El grupo cíclico de orden 6 es producto directo de los cíclicos de orden 2 y 3 (que contiene).

   (b) S_3 no es producto directo de A_3 por $<(1,2)>$.

5. Probar que si $G/\mathbf{Z}(G)$ es cíclico G es abeliano.
6. Sea p un número primo y G un grupo abeliano de orden p^2. Probar que G es cíclico o producto directo de dos subgrupos cíclicos de orden p.
7. Sea p un número primo; probar que todo grupo de orden p^2 es abeliano. Probar asimismo que hay salvo isomorfismos 2 grupos de orden p^2.
8. Sea H un subgrupo de G de índice n. Probar que $[G : \operatorname{core} H]$ es divisor de $n!$.
9. Sea p el primo más pequeño entre los divisores de $|G|$, probar que todo subgrupo de índice p es normal.
10. La acción de un grupo G sobre el conjunto A se dice regular si $G_a = 1$, $\forall a \in A$. Pruébese que si G es abeliano y transitivo es regular.
11. Pruébese que $G_a^\sigma = G_{\sigma a}\, \forall a \in A\, \forall \sigma \in G$.