5 Espacios métricos

Como su propio nombre indica, la cuarta y última parte del paquete está destinada a operar en espacios vectoriales métricos. Cubre los tópicos del capítulo IV del libro

Procedimientos simbólicos en ALGEBRA LINEAL

Algunos de los procedimientos de este archivo están ya en el paquete "linalg" de MAPLE; se han incluido aquí por razones de compacidad y dependencia de unos procedimientos con otros.

5.1 Principales procedimientos

DIAGONAL **Calcula una matriz congruente diagonal**

Diferentes maneras de utilización:

- DIAGONAL(A)
- DIAGONAL(A,K)
- DIAGONAL(A,P)
- DIAGONAL(A,P,K)

Argumentos:

- A - una matriz simétrica o hermitiana.
- (opcional) P - un símbolo (preferiblemente no "ligado").
- (opcional) K - un número primo impar o la expresión: complejo

Descripción:

La función **DIAGONAL** implementa los procedimientos de las páginas 161 y 178 del libro, para calcular una matriz congruente diagonal.

Sea $A = (a_{ij})$

- DIAGONAL(A) precisa una matriz simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Q}(a_{ij})$, una matriz diagonal congruente con A.

- Si K es un número primo, DIAGONAL(A,K) precisa una matriz simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Z}_p(a_{ij})$, una matriz diagonal congruente con A.
- Si K = complejo, A debe ser hermitiana y DIAGONAL(A,K) calcula, sobre $\mathbf{Q}(I, a_{ij})$, una matriz diagonal $\wedge$-congruente con A.
- DIAGONAL(A,P) precisa una matriz simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Q}(a_{ij})$, una matriz diagonal D congruente con A, alojando en la variable P una matriz P regular tal que $P^tAP = D$. Para obtener la matriz P, desde el *prompt* de Maple solícitese op(P).
- Si K es un número primo p, DIAGONAL(A,P,K) precisa una matriz simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Z}_p(a_{ij})$, una matriz diagonal D congruente con A, alojando en la variable P una matriz P regular tal que $P^tAP = D$.
- Si K = complejo, A debe ser hermitiana y DIAGONAL(A,P,K) calcula, sobre $\mathbf{Q}(I, a_{ij})$, una matriz diagonal D $\wedge$-congruente con A, alojando en la variable P una matriz P regular tal que $P^*AP = D$.

Ejemplos:

> A:=matrix(3,3,[a,b,c,b,d,e,c,e,f]);

$$A := \begin{bmatrix} 5 & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

> DIAGONAL(A);

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2/5 + d & 0 \\ 0 & 0 & (-2\,bce + 5\,e^2 + c^2d + fb^2 - 5\,fd)/(b^2 - 5\,d) \end{bmatrix}$$

> DIAGONAL(A,P):

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 1 & -b/5 & (cd - be)/(b^2 - 5\,d) \\ 0 & 1 & (5\,e - bc)/(b^2 - 5\,d) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> DIAGONAL(A,P,5);

$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 4\,b^2/d & 0 \\ 0 & 0 & (fb^2 + c^2d + 3\,bce)/b^2 \end{bmatrix}$$

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & (cd+4\,be)/b^2 \\ 1 & 4\,b/d & 4\,c/b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> B:=matrix(3,3,[0,2+I,3,2-I,0,5+I,3,5-I,0]);

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 2+I & 3 \\ 2-I & 0 & 5+I \\ 3 & 5-I & 0 \end{bmatrix}$$

> DIAGONAL(B,P,complejo);

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & -54/5 \end{bmatrix}$$

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 1 & -1-1/2\,I & -9/5-7/5\,I \\ -I & 1/2+I & -6/5+3/5\,I \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El usuario que desee comprobar los cálculos no olvide trabajar en cada caso en el cuerpo elegido.

CHOLESKY **Calcula la factorización de Cholesky de una matriz**

Diferentes maneras de utilización:

- CHOLESKY(A,P)
- CHOLESKY(A,P,K)

Argumentos:

- A - una matriz simétrica o hermitiana.
- (opcional) P - un símbolo (preferiblemente no "ligado").

- (opcional) K - un número primo o la expresión: complejo.

Descripción:

La función **CHOLESKY** implementa el procedimiento de la página 165 del libro, calculando la factorización de Cholesky de una matriz[1] A.

Sea $A = (a_{ij})$.

- CHOLESKY(A,L) precisa una matriz simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Q}(a_{ij})$, una matriz diagonal D congruente con A, alojando en la variable L una matriz L triangular inferior con unos en la diagonal tal que $A = LDL^t$.
- Si K es un número primo p, CHOLESKY(A,L,K) precisa una matriz simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Z}_p(a_{ij})$, una matriz diagonal D congruente con A, alojando en la variable L una matriz L triangular inferior con unos en la diagonal tal que $A = LDL^t$.
- Si K = complejo, A debe ser hermitiana y CHOLESKY(A,L,complejo) calcula, sobre $\mathbf{Q}(I, a_{ij})$, una matriz diagonal D $\wedge$-congruente con A, alojando en la variable L una matriz L triangular inferior con unos en la diagonal tal que $A = LDL^*$.

Para obtener la matriz L, desde el *prompt* de Maple solícitese op(L).

Ejemplos:

> A:=matrix(3,3,[a,b,c,b,d,e,c,e,f]);

$$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

> C:=CHOLESKY(A,L);

$$C := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2-da}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\,bce+e^2a+c^2d+fb^2-fad}{b^2-da} \end{bmatrix}$$

> op(L);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & \frac{bc-ea}{b^2-da} & 1 \end{bmatrix}$$

[1] simétrica o hermitiana según los casos y con los $n-1$ primeros menores no nulos

> evalm(L&*C&*transpose(L)):equal(simplify(%),A);

true

> B:=matrix([[3, 2+I, 3], [2-I, 0, 5+I], [3, 5-I, 0]]);

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 2+I & 3 \\ 2-I & 0 & 5+I \\ 3 & 5-I & 0 \end{bmatrix}$$

> C:=CHOLESKY(B,L,complejo);

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

> op(L);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 - 1/3\,I & 1 & 0 \\ 1 & -9/5 + 6/5\,I & 1 \end{bmatrix}$$

> evalm(L&*C&*htranspose(L)):equal(simplify(%),B);

true

> F:=matrix(3,3,[5,3,2,3,4,5,2,5,6]);

$$F := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

> C:=CHOLESKY(F,L,3);

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> op(L);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> M:=evalm(L&*C&*transpose(L)):equal(modulariza(M,3),modulariza(F,3));

true

ORTOGONAL Calcula el complemento ortogonal de un subespacio

Diferentes maneras de utilización:

- ORTOGONAL(B,A)
- ORTOGONAL(B,A,K)

Argumentos:

- A - una matriz simétrica o hermitiana, según los casos.
- B una matriz con tantas filas como A.
- (opcional) K - un número primo[2], o la expresión: complejo.

Descripción:

La función **ORTOGONAL** implementa el procedimiento de la página 171 del libro: Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{A})$ un espacio métrico de matriz coordenada A en una base (v_i). Sea (w_j) la familia de vectores de coordenadas las columnas de B; el procedimiento calcula una matriz N cuyas columnas son las coordenadas de una base de $(w_j)^{\perp}$.
Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ik})$.

- ORTOGONAL(B,A) precisa una matriz A simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Q}(a_{ij}, b_{ik})$, una matriz N, que es cero o de columnas libres, tal que $B^t AN = (0)$.
- Si K es un número primo p, ORTOGONAL(B,A,p) precisa una matriz A simétrica y calcula, sobre $\mathbf{Z}_p(a_{ij}, b_{ik})$, una matriz N, que es cero o de columnas libres, tal que $B^t AN = (0)$.
- Finalmente, ORTOGONAL(B,A,complejo) precisa una matriz A hermitiana y calcula, sobre $\mathbf{Q}(a_{ij}, b_{ik})$, una matriz N, que es cero o de columnas libres, tal que $B^* AN = (0)$.

Ejemplos:

```
> A:=matrix(3,3,[3*a,b,c,b,a,1,c,1,6*d]);
```

[2] impar para que tenga sentido teórico aunque el procedimiento funciona en cualquier caso

$$A := \begin{bmatrix} 3\,a & b & c \\ b & a & 1 \\ c & 1 & 6\,d \end{bmatrix}$$

> B:=matrix(3,2,[1,a,1-b,2*a,6*b,a]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1-b & 2\,a \\ 6\,b & a \end{bmatrix}$$

> ORTOGONAL(B,A,3);

$$\begin{bmatrix} (2\,abc + 2\,ac + 2\,b + b^2 + 2\,c + 2)/(b^2 + 2\,b^3 + b + 2\,bc + 2\,ac + abc) \\ (b^2c + c^2 + c)/(b^2 + 2\,b^3 + b + 2\,bc + 2\,ac + abc) \\ 1 \end{bmatrix}$$

> a:=1:b:=0:ORTOGONAL(B,A);

$$\begin{bmatrix} (1 - 6\,d + 2\,c)/(c-6) \\ -(c + c^2 - 3 - 18\,d)/(c-6) \\ 1 \end{bmatrix}$$

> A:=matrix(3,3,[1,1+I,1-I,1-I,2,3,1+I,3,5]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1+I & 1-I \\ 1-I & 2 & 3 \\ 1+I & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

> B:=matrix(3,1,[I,2-I,1+I]);

$$B := \begin{bmatrix} I \\ 2-I \\ 1+I \end{bmatrix}$$

> ORTOGONAL(B,A,complejo);

$$\begin{bmatrix} -\frac{44}{29} - \frac{6}{29}\,I & -\frac{56}{29} - \frac{5}{29}\,I \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SEUDOINVERSA Calcula la inversa de Moore-Penrose de una matriz

Utilización: SEUDOINVERSA(A)

Argumento: A - una matriz real o compleja.

Descripción: La función **SEUDOINVERSA** implementa el procedimiento de la página 198 del libro.

SEUDOINVERSA(A) resuelve el sistema de ecuaciones $\left[\frac{A^*A}{N^*}\right] X = \left[\frac{A^*}{0}\right]$ donde N es la matriz cuyas columnas contienen una base de la nulidad de A.

Ejemplos:

> A := matrix([[1, 4, 5], [2, 2, 3]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

> S:=SEUDOINVERSA(A);

$$\begin{bmatrix} -33/89 & 59/89 \\ 18/89 & -16/89 \\ 10/89 & 1/89 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario[3] que $ASA = A$, $SAS = S$, AS y SA son simétricas.

> A := matrix([[1, 1+I], [1-I, 2], [1+I, 3]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1+I \\ 1-I & 2 \\ 1+I & 3 \end{bmatrix}$$

> S:=SEUDOINVERSA(A);

$$S := \begin{bmatrix} 3/13 + 2/13\,I & 1/13 + 5/13\,I & -1/13 - 5/13\,I \\ -1/39 - 5/39\,I & 4/39 - 2/13\,I & 3/13 + 2/13\,I \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $ASA = A$, $SAS = S$, AS y SA son hermitianas.

[3]las condiciones definitorias de Penrose

SCHMIDT **Calcula una base ortogonal en un subespacio**

Diferentes maneras de utilización:

- SCHMIDT(A)
- SCHMIDT(A,F)

Argumentos:

- A - una matriz real o compleja de columnas libres.
- (opcional) F - una matriz definida positiva.

Descripción:

La función **SCHMIDT** implementa el procedimiento de la página 204 del libro: Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ un espacio unitario (euclídeo si A es real) de matriz coordenada F en una base (v_i). Sea (w_j) la familia de vectores de coordenadas las columnas de A; el procedimiento calcula una matriz G cuyas columnas son las coordenadas de una base ortogonal del subespacio generado por (w_j).

Las primeras columnas ortogonales de A, es decir al menos la primera, coinciden con las de G. Si se omite el argumento F, el programa toma por defecto la matriz idéntica.

Ejemplos:

> A := matrix([[1, 2], [4, 2], [5, 3]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

> S:=SCHMIDT(A);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 59/42 \\ 4 & -8/21 \\ 5 & 1/42 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^t S$ es diagonal.

> F:=linalg[hilbert](3);

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

> S:=SCHMIDT(A,F);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 209/172 \\ 4 & -49/43 \\ 5 & -159/172 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^t F S$ es diagonal.

> B:=matrix([[1, 1+I], [1-I, 2], [1+I, 3]]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1+I \\ 1-\sqrt{-1} & 2 \\ 1+I & 3 \end{bmatrix}$$

> S:=SCHMIDT(B);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1/5+I \\ 1-I & 4/5+6/5\,I \\ 1+I & 9/5-6/5\,I \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^* S$ es diagonal.

> S:=SCHMIDT(B,F);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{21}{32}+\frac{85}{224}\,I \\ 1-I & -\frac{31}{112}+\frac{29}{28}\,I \\ 1+I & \frac{55}{28}-\frac{255}{112}\,I \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^* F S$ es diagonal.

GRAM_SCHMIDT **Calcula una base ortogonal en un espacio**

Diferentes maneras de utilización:

- GRAM_SCHMIDT(A)
- GRAM_SCHMIDT(A,F)

Argumentos:

- A - una matriz real o compleja de columnas libres.
- (opcional) F - una matriz definida positiva.

Descripción:

La función **GRAM_SCHMIDT** implementa el procedimiento de la página 204 del libro: Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ un espacio unitario (euclídeo si A es real) de matriz coordenada F en una base (v_i). Sea (w_j) la familia de vectores de coordenadas las columnas de A; el procedimiento calcula una matriz G cuyas columnas son las coordenadas de una base ortogonal de $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

Las primeras columnas ortogonales de A, es decir al menos la primera, coinciden con las de G.

Si se omite el argumento F, el programa toma por defecto la matriz idéntica.

Ejemplos:

> A := matrix([[1, 2], [4, 2], [5, 3]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

> S:=GRAM_SCHMIDT(A);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 59/42 & 4/89 \\ 4 & -8/21 & 14/89 \\ 5 & 1/42 & -12/89 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^t S$ es diagonal.

> F:=linalg[hilbert](3):

> S:=GRAM_SCHMIDT(A,F);

$$\begin{bmatrix} 1 & 209/172 & -69/2443 \\ 4 & -49/43 & 56/349 \\ 5 & -159/172 & -380/2443 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^t F S$ es diagonal.

> B:=matrix([[1, 1+I], [1-I, 2], [1+I, 3]]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1+I \\ 1-I & 2 \\ 1+I & 3 \end{bmatrix}$$

> S:=GRAM_SCHMIDT(B);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1/5+I & 2/3 \\ 1-I & 4/5+6/5\,I & -1/3+1/3\,I \\ 1+I & 9/5-6/5\,I & 0 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^* S$ es diagonal.

> S:=GRAM_SCHMIDT(B,F);

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{21}{32}+\frac{85}{224}\,I & \frac{9}{47}-\frac{6}{47}\,I \\ 1-I & -\frac{31}{112}+\frac{29}{28}\,I & -\frac{44}{47}+\frac{32}{47}\,I \\ 1+I & \frac{55}{28}-\frac{255}{112}\,I & \frac{40}{47}-\frac{30}{47}\,I \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $S^* F S$ es diagonal.

QR **Calcula la factorización QR de una matriz**

Utilización: QR(A)

Argumento: A - una matriz real o compleja.

Descripción: La función **QR** implementa el procedimiento de la página 207 del libro.

QR(A) da una matriz Q de columnas ortonormales, en $\mathbf{R}^n$ euclídeo o $\mathbf{C}^n$ unitario, y una matriz R regular triangular superior de términos positivos en la diagonal tales que $A = QR$.

Ejemplos:

> A := matrix([[1, 2], [4, 2], [5, 3]]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

> lista:=QR(A):

> Q:=lista[1];

$$Q := \begin{bmatrix} 1/42\sqrt{42} & \frac{59}{3738}\sqrt{3738} \\ 2/21\sqrt{42} & -\frac{8}{1869}\sqrt{3738} \\ \frac{5}{42}\sqrt{42} & \frac{1}{3738}\sqrt{3738} \end{bmatrix}$$

> R:=lista[2];

$$R := \begin{bmatrix} \sqrt{42} & \frac{25}{42}\sqrt{42} \\ 0 & 1/42\sqrt{3738} \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $Q^tQ = I_2$ y que $A = QR$.

> B:=matrix([[1, 1+I], [1-I, 2], [1+I, 3]]): > lista:=QR(B):

> Q:=lista[1];

$$Q := \begin{bmatrix} 1/5\sqrt{5} & \left(-\frac{1}{195} + 1/39\,I\right)\sqrt{195} \\ (1/5 - 1/5\,I)\sqrt{5} & \left(\frac{4}{195} + \frac{2}{65}\,I\right)\sqrt{195} \\ (1/5 + 1/5\,I)\sqrt{5} & \left(\frac{3}{65} - \frac{2}{65}\,I\right)\sqrt{195} \end{bmatrix}$$

> R:=lista[2];

$$R := \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 6/5\sqrt{5} \\ 0 & 1/5\sqrt{195} \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $Q^*Q = I_2$ y que $B = QR$.

SCHUR **Calcula la triangulación ortogonal de una matriz**

Utilización: SCHUR(A)

Argumento: A - una matriz cuadrada sobre $K = \mathbf{R}$ ó $K = \mathbf{C}$ con forma de Jordan en K.

Descripción: La función **SCHUR** implementa el procedimiento de la página 210 del libro.

SCHUR(A) da un par de matrices Q y T tales que $Q^*AQ = T$ siendo Q ortogonal, en $\mathbf{R}^n$ euclídeo o $\mathbf{C}^n$ unitario, y T triangular superior.

Ejemplos:

> A:=matrix(2,2,[1,2,3,1]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

> lista:=SCHUR(A):

> Q:=lista[1];

$$Q := \begin{bmatrix} -1/15\,\sqrt{15}\,(\alpha_{11} - 1) & 1/10\,\sqrt{10}\,(\alpha_{11} - 1) \\ 1/5\,\sqrt{15} & 1/5\,\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

> T:=lista[2];

$$T := \begin{bmatrix} 2 - \alpha_{11} & -1/6\,\sqrt{2}\sqrt{3} + 1/6\,\sqrt{2}\sqrt{3}\alpha_{11} \\ 0 & \alpha 11 \end{bmatrix}$$

El usuario puede comprobar que $Q^tQ = I_2$ y que $Q^tAQ = T$.

> B:=matrix(2,2,[1,3+I,3-I,1]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 3 + I \\ 3 - I & 1 \end{bmatrix}$$

> lista:=SCHUR(B):

> Q:=lista[1];

$$Q := \begin{bmatrix} 1/10\,\sqrt{5}\,(\alpha_{11} - 1) & -1/10\,\sqrt{5}\,(\alpha_{11} - 1) \\ (3/10 - 1/10\,I)\,\sqrt{5} & (3/10 - 1/10\,I)\,\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

> T:=lista[2];

$$T := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 2 - \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

ESPECTRAL Calcula la diagonalización ortogonal de una matriz normal

Utilización: ESPECTRAL(A,P)

Argumentos:

- A - una matriz real o compleja normal ($A^*A = AA^*$)
- P - un símbolo (preferiblemente no ligado)

Descripción: La función **ESPECTRAL** implementa el procedimiento de la página 221 del libro.

- Si A es simétrica real ESPECTRAL(A,P) da una matriz diagonal D y aloja en la variable P una matriz P ortogonal real, tal que $P^tAP = D$.
- En los demás casos ESPECTRAL(A,P) da una matriz diagonal D y aloja en la variable P una matriz P ortogonal, en $\mathbf{C}^n$ unitario, tal que $P^*AP = D$.

Para obtener la matriz P desde el *prompt* de Maple solicítese op(P);

Ejemplos:

> A:=matrix(2,2,[1,2,2,1]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> C:=ESPECTRAL(A,P);

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

> evalm(transpose(P)&*P);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> evalm(transpose(P)&*A&*P);

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

> B:=matrix(2,2,[1,3+I,3-I,1]);

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 3+I \\ 3-I & 1 \end{bmatrix}$$

> C:=ESPECTRAL(B,P);

$$C := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 2-\alpha_{11} \end{bmatrix}$$

> op(alpha11),op(P);

$$\mathit{RootOf}(-9 - 2\,\_Z + \_Z^2), \begin{bmatrix} 1/10\,\sqrt{5}\,(\alpha_{11}-1) & -1/10\,\sqrt{5}\,(\alpha_{11}-1) \\ (3/10 - 1/10\,I)\,\sqrt{5} & (3/10 - 1/10\,I)\,\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

> evalm(htranspose(P)&*P);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> evalm(htranspose(P)&*B&*P);

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 2-\alpha_{11} \end{bmatrix}$$

ISOMETRIA **Calcula la forma canónica de una matriz ortogonal**

Utilización: ISOMETRIA(A,P)

Argumentos:

- A - una matriz ortogonal ($A^t A = I$)
- P - un símbolo (preferiblemente no ligado)

Descripción: La función **ISOMETRIA** implementa el procedimiento de la página 233 del libro. Da la forma canónica C de la isometríay aloja en la variable P una matriz P ortogonal, tal que $P^t AP = C$.

Para obtener la matriz P desde el *prompt* de Maple solicítese op(P);

Ejemplos:

> A:=matrix(3,3,[0,0,-1,0,-1,0,1,0,0]);

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> C:=ISOMETRIA(A,P);

$$C := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> evalm(transpose(P)&*P), evalm(transpose(P)&*A&*P);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

CUADRICA Calcula la ecuación canónica métrica de una cuádrica

Difreentes maneras de utilización:

- CUADRICA(f)
- CUADRICA(f,lista,n,P)

Argumentos:

- f - un polinomio en varias variables de grado 2.
- (opcional) lista - la lista ordenada de las variables de f
- (opcional) n - un número natural mayor o igual que el número de variables de f, indicando la dimensión del espacio considerado.
- P - un símbolo (preferiblemente no ligado)

Descripción: La función **CUADRICA(f)** implementa el procedimiento de la página 259 del libro.

- CUADRICA(f) da la ecuación canónica métrica de la cuádrica de ecuación $f = 0$. Puesto que algunos valores propios serán números algebraicos, no se ha implementado su orden, y éste será elegido por MAPLE.
- CUADRICA(f,lista,n,P) da en $\mathbf{R}^n$ la ecuación canónica métrica de la cuádrica de ecuación $f = 0$, y aloja en la variable P una matriz P regular tal que:
  - Su primera columna $(1, c_i)^t$ contiene las coordenadas $(c_1, \ldots, c_n)$ del nuevo origen.
  - Las columnas de su submatriz P_{00} contienen los vectores de la nueva base.

Ejemplos:

```
> f:=x**2+y**2+z**2+2*x*y+2*x*z+2*y*z+2*x-2*y-4*z+2;
```

$$f := x^2 + y^2 + z^2 + 2\,xy + 2\,xz + 2\,yz + 2\,x - 2\,y - 4\,z + 2$$

```
> CUADRICA(f);
```

$$3\,x^2 = 2/3\,\sqrt{42}y$$

> CUADRICA(f,[x,y,z],3,P):

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{45} & \sqrt{3}/3 & -\frac{5}{42}\,\sqrt{6}\sqrt{7} & -1/14\,\sqrt{2}\sqrt{7} \\ \frac{17}{45} & \sqrt{3}/3 & 1/42\,\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7} & 3/14\,\sqrt{2}\sqrt{7} \\ \frac{17}{45} & \sqrt{3}/3 & 2/21\,\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7} & -1/7\,\sqrt{2}\sqrt{7} \end{bmatrix}$$

> g:=x*y-z*t-1;

$$g := xy - zt - 1$$

> CUADRICA(g,[x,y,z,t],4,P);

$$1/2\,x^2 - 1/2\,y^2 - 1/2\,z^2 + 1/2\,t^2 = 1$$

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

5.2 Otros procedimientos de interés del archivo Metricos

rango_signatura **Calcula el rango y la signatura**

Diferentes maneras de utilización:

- rango_signatura(f)
- rango_signatura(A)

- rango_signatura(A,P)

Argumentos:

- f - una forma cuadrática real.
- A - una matriz simétrica real o hermitiana.
- (opcional) P - un símbolo (preferiblemente no “ligado”).

Descripción:

La función **rango_signatura** calcula el rango y la signatura de la forma cuadrática entrada f o de la matriz entrada A.

- Si f es una forma cuadrática real, rango_signatura(f) da el par $[r, s]$ donde r es su rango y s su signatura.
- Si A es una matriz hermitiana, rango_signatura(A) da el par $[r, s]$ donde r es el rango y s la signatura de la matriz A.
- rango_signatura(A,P) precisa una matriz hermitiana A; da el par $[r, s]$ donde r es el rango y s la signatura de la matriz A, y aloja en la variable P una matriz P regular tal que $P^t AP$ es diagonal.

Ejemplos:

```
> f:=x**2+y**2+z**2+2*x*y+2*x*z+2*y*z:
> rango_signatura(f);
```

$$[3, 3]$$

```
> rango_signatura(-f);
```

$$[3, 0]$$

```
> A:=matrix([[1, 2], [2, 1]]):
> rango_signatura(A);
```

$$[2, 1]$$

```
> rango_signatura(A,P);
```

$$[2, 1]$$

```
> op(P);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $P^t AP = \text{diag}\,[1, -3]$

> A:=matrix([[1, 2+I], [2-I, 1]]):

> rango_signatura(A);

$$[2, 1]$$

> rango_signatura(A,P);

$$[2, 1]$$

> op(P);

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 - I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar el usuario que $P^* AP = \text{diag}\,[1, -4]$

Proyeccion **Calcula la proyección ortogonal de un vector**

Diferentes maneras de utilización:

- Proyeccion(V,U)
- Proyeccion(V,U,F)

Argumentos:

- V - La (matriz) columna de las coordenadas de un vector.
- U - Una matriz cuyas columnas contiene las coordenadas de la base de un subespacio.
- (opcional) F - una matriz definida positiva.

Descripción:

La función **Proyeccion** implementa la definición 5.8 de la página 190 del libro: Sea $(\mathcal{V}, <, >)$ un espacio vectorial unitario de matriz coordenada F en una base (v_i), v el vector de coordenadas V en dicha base y S el subespacio generado por los vectores de coordenadas en las columnas de U.

La función proyección calcula las coordenadas en la base (v_i) del vector proyección ortogonal de v sobre el subespacio S. Si el parámetro opcional F se omite, el programa toma por defecto la matriz identidad.

Ejemplos:

> U:=matrix(3,2,[1,2,3,4,5,1]);

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

> V:=matrix(3,1,1);

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> Proyeccion(V,U);

$$\begin{bmatrix} 6/11 \\ 232/187 \\ 177/187 \end{bmatrix}$$

> F:=linalg[hilbert](3);

$$F := \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

> Proyeccion(V,U,F);

$$\begin{bmatrix} 11013/12803 \\ 21803/12803 \\ 4503/12803 \end{bmatrix}$$

> U:=matrix(3,2,[1+I,2,3-I,4,5,1]);

$$U := \begin{bmatrix} 1+I & 2 \\ 3-I & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

> V:=matrix(3,1,1+I);

$$V := \begin{bmatrix} 1+I \\ 1+I \\ 1+I \end{bmatrix}$$

> Proyeccion(V,U);

$$\begin{bmatrix} \frac{42}{103} + \frac{81}{103}\, I \\ \frac{133}{103} + \frac{120}{103}\, I \\ \frac{105}{103} + \frac{79}{103}\, I \end{bmatrix}$$

> Proyeccion(V,U,F);

$$\begin{bmatrix} \frac{6757}{7803} + \frac{133}{153}\, I \\ \frac{4289}{2601} + \frac{13387}{7803}\, I \\ \frac{3223}{7803} + \frac{2443}{7803}\, I \end{bmatrix}$$

Schmidt **Calcula una base ortonormal en un subespacio**

Diferentes maneras de utilización:

- Schmidt(U)
- Schmidt(U,F)

Argumentos:

- U - una matriz real o compleja de columnas libres.
- (opcional) F - una matriz definida positiva.

Descripción:

Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ un espacio unitario (euclídeo si U es real) de matriz coordenada F en una base (v_i). Sea (u_j) la familia de vectores de coordenadas las columnas de U; el procedimiento calcula una matriz S cuyas columnas son las coordenadas de una base ortonormal del subespacio generado por (u_j).

Las primeras columnas ortogonales de U, es decir al menos la primera, aparecen normalizadas en S.

Si se omite el argumento F, el programa toma por defecto la matriz idéntica.

Ejemplos:

> U:=matrix(3,2,[1,2,3,4,5,1]);

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

> S:=Schmidt(U);

$$S := \begin{bmatrix} 1/35\sqrt{35} & \frac{3}{770}\sqrt{13090} \\ \frac{3}{35}\sqrt{35} & \frac{83}{13090}\sqrt{13090} \\ 1/7\sqrt{35} & -\frac{6}{1309}\sqrt{13090} \end{bmatrix}$$

El usuario puede comprobar, simplificando, que $S^tS = I_2$.
> F:=linalg[hilbert](3):
> S:=Schmidt(U,F);

$$S := \begin{bmatrix} \frac{1}{137}\sqrt{822} & \frac{291}{1754011}\sqrt{52620330} \\ \frac{3}{137}\sqrt{822} & \frac{325}{1754011}\sqrt{52620330} \\ \frac{5}{137}\sqrt{822} & -\frac{1011}{1754011}\sqrt{52620330} \end{bmatrix}$$

El usuario puede comprobar, simplificando, que $S^tFS = I_2$.
> U:=matrix(3,2,[1+I,2,3-I,4,5,1]);

$$U := \begin{bmatrix} 1+I & 2 \\ 3-I & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

> S:=Schmidt(U);

$$S := \begin{bmatrix} (1/37 + 1/37\,I)\sqrt{37} & \left(\frac{57}{7622} - \frac{21}{7622}\,I\right)\sqrt{3811} \\ \left(\frac{3}{37} - 1/37\,I\right)\sqrt{37} & \left(\frac{89}{7622} + \frac{13}{7622}\,I\right)\sqrt{3811} \\ \frac{5}{37}\sqrt{37} & \left(-\frac{29}{3811} - \frac{5}{3811}\,I\right)\sqrt{3811} \end{bmatrix}$$

El usuario puede comprobar, simplificando, que $S^* S = I_2$.

> S:=Schmidt(U,F);

$$S := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{139} + \frac{1}{139}\, I\right)\sqrt{834} & \left(\frac{2}{51} - \frac{236}{7089}\, I\right)\sqrt{695} \\ \left(\frac{3}{139} - \frac{1}{139}\, I\right)\sqrt{834} & \left(\frac{362}{7089} + \frac{320}{7089}\, I\right)\sqrt{695} \\ \frac{5}{139}\sqrt{834} & \left(-\frac{1007}{7089} + \frac{35}{2363}\, I\right)\sqrt{695} \end{bmatrix}$$

> evalm(htranspose(S)&*F&*S):

> map(simplify,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gram_schmidt **Calcula una base ortonormal en un espacio**

Diferentes maneras de utilización:

- Gram_schmidt(U)
- Gram_schmidt(U,F)

Argumentos:

- U - una matriz real o compleja de columnas libres.
- (opcional) F - una matriz definida positiva.

Descripción:

Sea $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ un espacio unitario (euclídeo si U es real) de matriz coordenada F en una base (v_i). Sea (u_j) la familia de vectores de coordenadas las columnas de A; el procedimiento calcula una matriz S cuyas columnas son las coordenadas de una base ortonormal de $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$.

Las primeras columnas ortogonales de U, es decir al menos la primera, aparecen normalizadas en S.

Si se omite el argumento F, el programa toma por defecto la matriz idéntica.

Ejemplos:

> U:=matrix(3,2,[1,2,3,4,5,1]);

$$U := \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{array}\right]$$

> S:=Gram_schmidt(U);

$$S := \left[\begin{array}{ccc} 1/35\,\sqrt{35} & \frac{3}{770}\,\sqrt{13090} & 1/22\,\sqrt{374} \\ \frac{3}{35}\,\sqrt{35} & \frac{83}{13090}\,\sqrt{13090} & -\frac{9}{374}\,\sqrt{374} \\ 1/7\,\sqrt{35} & -\frac{6}{1309}\,\sqrt{13090} & \frac{1}{187}\,\sqrt{374} \end{array}\right]$$

> F:=linalg[hilbert](3):

> S:=Gram_schmidt(U,F);

$$S := \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{137}\,\sqrt{822} & \frac{291}{1754011}\,\sqrt{52620330} & \frac{179}{12803}\,\sqrt{38409} \\ \frac{3}{137}\,\sqrt{822} & \frac{325}{1754011}\,\sqrt{52620330} & -\frac{900}{12803}\,\sqrt{38409} \\ \frac{5}{137}\,\sqrt{822} & -\frac{1011}{1754011}\,\sqrt{52620330} & \frac{830}{12803}\,\sqrt{38409} \end{array}\right]$$

El usuario puede comprobar, simplificando, que $S^t F S = I_3$.

> U:=matrix(3,2,[1+I,2,3,4-I,5,1]);

$$U := \left[\begin{array}{cc} 1+I & 2 \\ 3 & 4-I \\ 5 & 1 \end{array}\right]$$

> S:=Gram_schmidt(U);

$$S := \begin{bmatrix} 1/6+1/6\,I & \left(\frac{4}{203}-\frac{1}{174}\,I\right)\sqrt{406} & \frac{1}{203}\sqrt{31871} \\ 1/2 & \left(1/28-\frac{1}{116}\,I\right)\sqrt{406} & \left(-\frac{79}{31871}+\frac{2}{4553}\,I\right)\sqrt{31871} \\ 5/6 & \left(-\frac{59}{2436}+\frac{25}{2436}\,I\right)\sqrt{406} & \left(\frac{16}{31871}+\frac{23}{31871}\,I\right)\sqrt{31871} \end{bmatrix}$$

El usuario puede comprobar, simplificando, que $S^*S = I_3$.

> S:=Gram_schmidt(U,F);

$$S := \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{143}+\frac{1}{143}\,I\right)\sqrt{858} & \left(\frac{236}{69641}-\frac{166}{69641}\,I\right)\sqrt{80355} & \left(\frac{1579}{993967}+\frac{62}{993967}\,I\right)\sqrt{2981901} \\ \frac{3}{143}\sqrt{858} & \left(\frac{391}{69641}-\frac{31}{69641}\,I\right)\sqrt{80355} & \left(-\frac{7900}{993967}-\frac{484}{993967}\,I\right)\sqrt{2981901} \\ \frac{5}{143}\sqrt{858} & \left(-\frac{969}{69641}+\frac{425}{69641}\,I\right)\sqrt{80355} & \left(\frac{7270}{993967}+\frac{540}{993967}\,I\right)\sqrt{2981901} \end{bmatrix}$$

El usuario puede comprobar, simplificando, que $S^*FS = I_3$.

---

seudo_solucion **Da la seudo-solucion de un sistema**

Utilización: seudo_solucion(A,B)

Argumentos:

- A - una matriz real o compleja.
- B - una matriz con la misma cantidad de filas que A.

Descripción: seudo_solucion implementa el teorema 5.1.1 de la página 195 del libro resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{bmatrix} A^*A \\ \hline N^* \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} A^*B \\ \hline 0 \end{bmatrix}$ donde N es la matriz cuyas columnas contienen una base de la nulidad de A.

Ejemplos:

> A:=matrix(4,3,[1,2,3,-8,9,1,-1,2,1,0,1,1]):B:=matrix(4,2,[1,2,3,4,5,1,-1,1]):

> op(A),op(B);

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & 9 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> seudo_solucion(A,B);

$$\begin{bmatrix} -5/189 & 1/378 \\ 64/189 & 151/378 \\ 59/189 & 76/189 \end{bmatrix}$$

> A:=matrix(4,3,[1+I,2-I,3,-8+I,9-I,1,-1,2,1,0,1,1]):B:=matrix(4,2,[1+I,2,3,4,5,1-I,-1,1]):

> op(A),op(B);

$$\begin{bmatrix} 1+I & 2-I & 3 \\ -8+I & 9-I & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+I & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 1-I \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> seudo_solucion(A,B);

$$\begin{bmatrix} -\frac{23}{1146}+\frac{169}{1146}I & \frac{3}{382}-\frac{5}{1146}I \\ \frac{391}{1146}+\frac{68}{573}I & \frac{151}{382}+\frac{11}{573}I \\ \frac{184}{573}+\frac{305}{1146}I & \frac{77}{191}+\frac{17}{1146}I \end{bmatrix}$$

ajusta **Ajusta una familia de puntos**

Utilización: ajusta(l,x,n)

Argumentos:

- l - una lista del tipo $[[x_0, y_0, \ldots, [x_m, y_m]]$.
- x - una indeterminada.
- n - un número natural

Descripción: La función **ajusta** da el polinomio de grado menor o igual que n, que ajusta por mínimos cuadrados a los puntos de coordenadas (x_i, y_i).

Ejemplos:

> l:=[[-2,3],[-1,1],[0,2],[1,3],[2,5]]:

$$l := [[-2,3],[-1,1],[0,2],[1,3],[2,5]]$$

> ajusta(l,t,2);

$$58/35 + 3/5t + 4/7t^2$$

> l:=[[0,0],[0,1],[1,0],[1,1],[2,2]];

$$l := [[0,0],[0,1],[1,0],[1,1],[2,2]]$$

> ajusta(l,x,3);

$$1/2 - 3/14x - 3/56x^2 + 15/56x^3$$

DVS **Da la descomposición del valor singular de una matriz**

Utilización: DVS(A)

Argumentos:
A - una matriz real o compleja.

Descripción: DVS(A) da una lista de tres matrices $[U, \Sigma, V]$ tales que

- U y V son unitarias (ortogonales si A es real).
- Σ es la matriz de los valores singulares de A.
- $A = U\Sigma V$.

Ejemplos:

> A:=matrix(3,2,[3,0,1,1,0,3]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> lista:=DVS(A):

> U:=lista[1];

$$U := \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \frac{3}{22}\sqrt{22} & \sqrt{11}/11 \\ 0 & \sqrt{22}/11 & -3\sqrt{11}/11 \\ \sqrt{2}/2 & \frac{3}{22}\sqrt{22} & \sqrt{11}/11 \end{bmatrix}$$

> Sigma:=lista[2];

$$\Sigma := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> V:=lista[3];

$$V := \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

> equal(A,U&*Sigma&*V);

true

> A:=matrix(3,2,[3,0,I,I,0,3]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ I & I \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

> lista:=DVS(A):

> U:=lista[1];

$$U := \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \frac{3}{22}\sqrt{22} & \sqrt{11}/11 \\ 0 & \sqrt{22}\,I/11 & -3\sqrt{11}\,I/11 \\ \sqrt{2}/2 & \frac{3}{22}\sqrt{22} & \sqrt{11}/11 \end{bmatrix}$$

> Sigma:=lista[2];

$$\Sigma := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> V:=lista[3];

$$V := \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

> equal(A,U&*Sigma&*V);

true

seudo_vw **Calcula la seudoinversa de una aplicación lineal**

Diferentes maneras de utilización:

- seudo_vw(A,W)
- seudo_vw(A,W,F,G)

Argumentos:

- A una matriz real o compleja de m filas y n columnas
- W - Una matriz columna con m filas.
- (opcionales) F,G - matrices definidas positivas de órdenes respectivos n y m.

Descripción:

La función **seudo_vw** implementa la definición 5.2.1. de la página 196 del libro. Sean $(V, <, >)$ y $(W, <>)$ espacios vectoriales unitarios de matrices coordenadas F y G en bases respectivas (v_i), (w_j) y sea w el vector de coordenadas W en la base (w_j). Sea f aplicación lineal de V en W de matriz coordenada A en dichas bases. La función seudo_vw calcula las coordenadas en la base (v_i) del vector $f^\dagger w$. Si los parámetros opcionales F y G se omiten, el programa toma por defecto la matriz identidad del tamaño adecuado.

Ejemplos:

> A:=matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

> W:=matrix(2,1,1);

$$W := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> seudo_vw(A,W);

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

> F:=linalg[hilbert(3): G:=linalg[hilbert](2):

> seudo_vw(A,W,F,G);

$$\begin{bmatrix} 1/4 \\ -3/2 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

> A:=matrix(2,3,[1,2,3+I,4-I,5,6]);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3+\sqrt{-1} \\ 4-\sqrt{-1} & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

> W:=matrix(2,1,[1+I,1-I]);

$$W := \begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

> seudo_vw(A,W);

$$\begin{bmatrix} -\frac{17}{97} - \frac{81}{97}\, I \\ -\frac{42}{97} + \frac{6}{97}\, I \\ \frac{76}{97} + \frac{30}{97}\, I \end{bmatrix}$$

> seudo_vw(A,W,F,G);

$$\begin{bmatrix} \frac{65}{171} + \frac{1}{171}\, I \\ -\frac{94}{57} - \frac{10}{171}\, I \\ \frac{220}{171} - \frac{10}{171}\, I \end{bmatrix}$$

seudo_v **Calcula la seudoinversa de un endomorfismo**

Diferentes maneras de utilización:

- seudo_v(A,V)
- seudo_v(A,V,F)

Argumentos:

- A una matriz cuadrada real o compleja de orden n
- V - Una matriz columna con n filas.
- (opcional) F - una matriz definida positiva de orden n.

Descripción:

La función **seudo_v** es caso particular de la anterior, **seudo_vw**, para $n = m$. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial unitario de matriz coordenada F en base (v_i), y sea v el vector de coordenadas V en la base (v_i). Sea h el endomorfismo de V de matriz coordenada A en dichas bases. La función seudo_v calcula las coordenadas del vector $h^\dagger v$. Si el parámetro opcional F se omite, el programa toma por defecto la matriz identidad del tamaño adecuado.

Ejemplos:

\> A:=matrix(3,3,[1,2,3,4,5,6,7,8,9]):V:=matrix(3,1,[0,0,1]):

\> seudo_v(A,V);

$$\begin{bmatrix} 11/36 \\ 1/18 \\ -7/36 \end{bmatrix}$$

\> F:=linalg[hilbert](3):

\> seudo_v(A,V,F);

$$\begin{bmatrix} -245/1881 \\ 1312/1881 \\ -830/1881 \end{bmatrix}$$

\> A:=matrix(3,3,[1,2+I,3,4,5,6-I,7,8,9]): V:=matrix(3,1,[0,I,1]):

\> seudo_v(A,V);

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{10}{7} I \\ 6/7 - \frac{11}{7} I \\ -\frac{10}{7} + 2/7 I \end{bmatrix}$$

MOVIMIENTO **Calcula la forma canónica de un movimiento**

Utilización: MOVIMIENTO(a,A)

Argumentos:

- A - una matriz ortogonal ($A^t A = I$)
- a - una matriz columna con la misma cantidad de filas que A

Descripción: La función **MOVIMIENTO** da como output una lista de listas

$$[[p, B], [q, C]]$$

donde

- $Y = p + BX$ es la ecuación canónica del movimiento $Y = a + AX$,
- la columna q contiene las coordenadas del nuevo origen
- y las columnas de C contienen los vectores directores de los nuevos ejes coordenados.

Los casos triviales $p = (0)$ (el nuevo movimiento carece de traslación) ó $q = (0)$ (no hay cambio de origen) se excluyen del output.