Espacios vectoriales euclídeos y unitarios

Se estudian los espacios en los que es posible *medir*. Intuitivamente, medir es asignar a cada vector un número real positivo; de esta manera las formas cuadráticas (respectivamente, formas hermitianas) definidas positivas son el contexto geométrico adecuado.

Dado un vector v, podremos considerar su norma: $+\sqrt{< v, v >}$, siendo notables las bases ortogonales cuyos vectores posean norma 1; se dicen bases ortonormales. El cambio de bases de este tipo viene dado por las matrices del grupo unitario, ortogonal en el caso real

$$U(n) = \{P \mid P^*P = I_n\}$$

La primera propiedad geométrica de estos espacios es que todo subespacio posee un único suplementario ortogonal, hecho que conduce a la consideración de la proyección ortogonal de un vector; concepto íntimamente relacionado con el problema de los mínimos cuadrados, seudoinversa de una matriz,...

La búsqueda de la proyección ortogonal de v sobre S es fácil si se conoce una base ortonormal de S, problema resuelto de manera sencilla por el procedimiento de Gram-Schmidt, cuya versión matricial es la factorización QR de una matriz de rango de columnas máximo.

Finaliza el párrafo con la exposición de las desigualdades de Schwartz y Minkowski, garantizando que la asignación:

$$v \rightsquigarrow \|v\| = +\sqrt{< v, v >}$$

es una buena manera de *medir*.

Consideraremos exclusivamente espacios vectoriales reales o complejos de dimensión finita n, aunque gran parte de los resultados expuestos tienen validez en dimensión arbitraria.