

Seudoinversa

Sea $f: V \longrightarrow W$, una aplicación lineal. El subespacio imagen, $\text{Im } f$, es biyectivo con cualquier suplementario T de $\ker f$. Así, la proyección de W sobre $\text{Im } f$ compuesta con dicha biyección es una *inversa* de f .

Por supuesto, tal *inversa* no será única, toda vez que la elección de T es amplia; asimismo la proyección de W sobre $\text{Im } f$ depende en general del suplementario U de $\text{Im } f$ elegido. En el caso de ser V y W unitarios, podemos tomar como T el complemento ortogonal $(\ker f)^\perp$ de $\ker f$, y $U = (\text{Im } f)^\perp$. Esta elección garantiza además, la *proximidad* de la imagen y la *minimalidad* de la antiimagen.

Denotando π a la proyección ortogonal de W sobre $\text{Im } f$, y g a la biyección entre $\text{Im } f$ y $(\ker f)^\perp$ el concepto clave es:

*Se dice **seudoinversa** de la aplicación lineal f a*

$$f^\dagger: W \xrightarrow{\pi} \text{Im } f \xrightarrow{g} (\ker f)^\perp \hookrightarrow V$$

Como consecuencia,

*Dada una matriz A $m \times n$ sobre $K = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$ se dice **seudoinversa** de A a la matriz coordinada $A^\dagger$, en bases canónicas, de $f^\dagger$ donde f es la aplicación lineal definida por $f(X) = AX$.*

Como resultado a destacar, se prueba que $A^\dagger$ se obtiene mediante eliminación gaussiana en

$$\left(\begin{array}{c|c} A^*A & A^* \\ \hline N^* & 0 \end{array} \right)$$

donde N es la matriz nulidad de A , lo que conduce al correspondiente procedimiento simbólico de obtención de $A^\dagger$.

En secciones posteriores se prueba que $A^\dagger$ es la inversa de Moore-Penrose. Es decir, la única matriz B tal que:

- $ABA = A$
- $BAB = B$
- AB y BA son hermitianas.