

PROCEDIMIENTOS

RANGO DE UNA MATRIZ

Procedimiento **ESCALONA_POR_FILAS**:

Entrada: Una matriz A $m \times n$ sobre K

Salida: Una matriz F escalonada por filas, obtenida de A mediante operaciones elementales tipo 1 y 2.

- [E1]: Si $A = (0)$, o $m = 1$ FIN.
- [E2]: Sea A^j la primera columna no nula y $c = a_{ij}$ el primer término no nulo de dicha columna; permutar las filas 1 e i .
- [E3]: Sumar a cada fila k distinta de 1 e i , la 1^a multiplicada por $(-a_{kj})/c$.
- [E4]: Si $n = 1$ FIN.
- [E5]: Iterar desde E1 en la submatriz formada por las filas 2 a m .

Procedimiento **RANGO_DE_FILAS**:

Entrada: Una matriz A $m \times n$ sobre K

Salida: Su rango de filas r .

- [rang1]: Si $A = (0)$, entonces $r = 0$ FIN.
- [rang2]: Si $m = 1$ entonces $r = 1$ FIN.
- [rang3]: Sea B la matriz que resulta de suprimir las filas nulas o iguales de A .
- [rang4]: $F := \text{ESCALONA_POR_FILAS}(B)$
- [rang5]: $r :=$ número de filas no nulas de F .

Procedimiento **ESCALONA_POR_COLUMNSAS**:

Entrada: Una matriz A $m \times n$ sobre K

Salida: Una matriz F escalonada por columnas, obtenida de A mediante operaciones elementales tipo 1 y 2.

- [Ec1]: Si $A = (0)$, o $n = 1$ FIN.
- [Ec2]: $B := \text{ESCALONA_POR_FILAS}(A^t)$
- [Ec3]: $F := B^t$

Procedimiento **I_SUB_r**:

Entrada: Una matriz A $m \times n$ sobre K

Salida: La matriz $[I_r, 0]$ donde r es el rango de A

[Ir1]: Si $A = (0)$, $r = 0$, $[I_r, 0] := A$ FIN.
 [Ir2]: $F := \text{ESCALONA_POR_FILAS}(A)$
 [Ir3]: $G := \text{ESCALONA_POR_COLUMNAS}(F)$
 [Ir4]: Dividir las filas de G por su pivote,
 obteniendo $[I_r, 0]$

Procedimiento **I_SUB_r_P_Q**:

Entrada: Una matriz A $m \times n$ sobre K

Salida: Matrices P y Q regulares tales que $PAQ = [I_r, 0]$
 donde r es el rango de A

[Irp1]: Si $A = (0)$, $r = 0$, $P = I_m$, $Q = I_n$ FIN.
 [Irp2]: $(F|P) := \text{ESCALONA_POR_FILAS}(A \mid I_m)$
 [Irp3]: $\left(\frac{G}{R}\right) := \text{ESCALONA_POR_COLUMNAS}\left(\frac{F}{I_n}\right)$
 [Irp4]: $r :=$ número de filas no nulas de G
 [Irp5]: Dividir las columnas de $\left(\frac{G}{R}\right)$ por su pivote,
 obteniendo $\left(\frac{[I_r, 0]}{Q}\right)$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Procedimiento **NULIDAD** (versión 1):

Entrada: Una matriz no nula $A \in M_{m \times n}(K)$.

Salida: Una base de la nulidad de A .

[Nul1]: $\left(\frac{G}{Q}\right) := \mathbf{ESCALONA_POR_COLUMNAS} \left(\frac{A}{I_n}\right)$

[Nul2]: Sea r el número de columnas
no nulas de G .

[Nul3]: Escribir las columnas $Q^{r+1}, \dots, Q^n$ de Q .

Procedimiento **CRAMER**:

Entrada: Un sistema de Cramer $AX = B$ sobre el cuerpo K

Salida: La (única) solución del sistema, como vector de K^n .

[Cr1]: Escribir la matriz ampliada $(A|B)$

[Cr2]: Si $B = (0)$, la solución es (0) FIN.

[Cr3]: $(C|D) := \mathbf{ESCALONA_POR_FILAS} (A|B)$

[Cr4]: Calcular iterativamente, la n -tupla $(s_1, \dots, s_n)$ dada por:

$$s_n = d_n / c_{nn}$$

$$s_i = (d_i - c_{ii+1}s_{i+1} - \dots - c_{in}s_n) / c_{ii} \quad i = n-1, \dots, 1$$

Procedimiento **SOLUCION PARTICULAR**:

Entrada: Un sistema compatible $AX = B$ de r ecuaciones y rango r .

Salida: Una solución particular del sistema.

[Par1]: Si $B = (0)$ la solución es (0) FIN.

[Par2]: Elegir una submatriz regular C de A de orden r ;
(si A es escalonada, la formada por las columnas
donde están los pivotes)

[Par3]: Resolver el sistema de Cramer resultante $CX = B$
Sea $(s_1, \dots, s_r)$ su única solución

[Par4]: Escribir,

$$(0 \quad \dots \quad \overset{j_1}{s_1} \quad \dots \quad \overset{j_r}{s_r} \quad \dots 0)$$

Procedimiento **NULIDAD** (versión 2):

Entrada: Una matriz no nula $A \in M_{m \times n}(K)$

Salida: Una base de la nulidad de A

- [Nul1]: $A_0 := \mathbf{ESCALONA_POR_FILAS}(A)$
- [Nul2]: Sea A_1 la submatriz de A_0 que resulta de suprimir las últimas filas nulas de A
- [Nul3]: $r :=$ número de filas de A_1 . Si $r = n, \emptyset$ FIN.
- [Nul4]: Elegir submatriz regular C de orden r de A_1
- [Nul5]: Sean $i_1, \dots, i_{n-r}$ los índices de columnas que no intervienen en C
- [Nul6]: Para $k = 1, \dots, n - r$ asignar los valores $x_{i_k} = 1, x_{i_h} = 0, \forall h \neq k$, y resolver el sistema de Cramer resultante. Sea $(s_1^k, \dots, s_r^k)$ su única solución
- [Nul7]: Para $k = 1, \dots, n - r$ escribir:

$$(0 \quad \dots \quad \overbrace{s_1^k}^{j_1} \quad \dots \quad \overbrace{s_r^k}^{j_r} \quad \dots \quad \overbrace{1}^{i_k} \quad \dots \quad 0)$$

Procedimiento **GAUSS**:

Entrada: Un sistema, de m ecuaciones con n incógnitas, $AX = B$ sobre K .

Salida: La solución general del sistema o su incompatibilidad.

- [GAUSS1]: $(A_0|B_0) := \mathbf{ESCALONA_POR_FILAS}(A|B)$
- [GAUSS2]: Si $\text{rang}(A_0) \neq \text{rang}(A_0|B_0)$,
SISTEMA INCOMPATIBLE. FIN.
- [GAUSS3]: Suprimir las filas nulas de $(A_0|B_0)$.
Sea $(C|D)$ la matriz resultante.
- [GAUSS4]: $S := \mathbf{SOLUCION_PARTICULAR}(CX = D)$
- [GAUSS5]: $\mathcal{N} := \mathbf{NULIDAD}(C)$
- [GAUSS6]: Escribir $S + \mathcal{N}$

SEMEJANZA DE MATRICES

Procedimiento **DIAGONALIZA**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K

Salida: Una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ es la diagonal de valores propios de A , o la imposibilidad de diagonalización.

[DIAG1]: Encontrar las raíces en K del polinomio $|xI_n - A|$.

Si no existen raíces, A NO DIAGONALIZA SOBRE K . FIN.

Sean $(d_1, \dots, d_r)$ las raíces en K de $|xI_n - A|$.

[DIAG2]: Para cada j calcular

$$m_j := \dim V(d_j) = n - \text{rang}(d_j I_n - A)$$

[DIAG3]: Si $\sum_{j=1}^r m_j < n$, A NO DIAGONALIZA SOBRE K . FIN.

[DIAG4]: Para cada j calcular una base $P_j^1, \dots, P_j^{m_j}$ de la nulidad de $(d_j I_n - A)$.

[DIAG5]: $P := (P_1^1, \dots, P_1^{m_1}, \dots, P_r^1, \dots, P_r^{m_r})$

Procedimiento **MÍNIMO1**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K

Salida: El polinomio mínimo de e_1 .

[MIN1]: $k := 1$.

[MIN2]: Buscar un término no nulo en A , por debajo del lugar (k, k) .

[MIN3]: Si no existe, ir al paso [MIN7].

[MIN4]: Mediante operaciones elementales en las filas de A obtener como columna k el vector e_{k+1} .

[MIN5]: Hacer las operaciones elementales inversas en las columnas de la matriz resultante.

[MIN6]: $k := k + 1$. Si $k < n$ ir al paso [MIN2].

[MIN7]: La matriz obtenida tiene el aspecto deseado:

$$\left(\begin{array}{c|c} C(f) & N_1 \\ \hline 0 & N_2 \end{array} \right)$$

Escribir f .

El procedimiento anterior puede aplicarse a cualquier matriz orlada $\left(\begin{array}{c|c} A & R \\ \hline Q & \end{array} \right)$

Procedimiento **MINIM**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K .

Salida: Su polinomio mínimo f .

[MINI1]: Desde $k = 1$ hasta n hacer

$$f_k := \mathbf{MÍNIMO1}(P_{1k}AP_{1k})$$

[MINI2]: $f := \text{mcm}(f_1, \dots, f_n)$

Procedimiento **CEROS A DERECHA**:

Entrada: Una matriz sobre K de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} C(f) & N_1 \\ \hline 0 & N_2 \end{array} \right)$$

Salida: Una matriz semejante sobre K de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} C(f) & \begin{smallmatrix} * & \cdots & * \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & N_2 \end{array} \right)$$

[Cer1]: Sea r el tamaño de $C(f)$.

[Cer2]: Desde $k = r$ hasta 2 hacer:

[Cer2.1]: para $j = r + 1, \dots, n$ efectuar las operaciones elementales $P_{k-1,j}(\ast)$ en las columnas a fin de anular los términos (k, j)

[Cer2.2]: Efectuar las operaciones elementales inversas en las filas

El procedimiento anterior puede aplicarse a una matriz orlada de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} A & R \\ \hline Q & \end{array} \right) \text{ donde } A = \left(\begin{array}{c|c} C(f) & N_1 \\ \hline 0 & N_2 \end{array} \right)$$

Procedimiento **UN BLOQUE**:

Entrada: Una matriz A cuadrada sobre K

Salida: Una matriz semejante sobre K de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} C(f) & 0 \\ \hline 0 & G \end{array} \right)$$

[BL1]: $B := \text{MINIMO1}(A)$

[BL2]: $C := \left(\begin{array}{cc} C(g) & N \\ 0 & G \end{array} \right) := \text{CEROS A DERECHA}(B)$

[BL3]: Si $N = (0)$ FIN

[BL3]: Sea $(1, j)$ el lugar que ocupa en C un término no nulo de N .

[BL4]: Sea $D = P_{1j}CP_{1j}$

[BL5]: $A := D$. Ir al paso [BL1].

El procedimiento anterior puede aplicarse a cualquier matriz orlada $\left(\begin{array}{c|c} A & R \\ \hline Q & \end{array} \right)$

Procedimiento **CICLICA**:

Entrada: Una matriz A cuadrada de orden n sobre K

Salida: Una forma cíclica de A

[CI1]: $j := 0$

[CI2]: Mientras $j < n - 1$ efectuar:

[CI2.1]: Sea A_1 la submatriz de A que resulta de suprimir las filas y columnas $1, \dots, j$

[CI2.2]: $B := \left(\begin{array}{cc} C(g) & 0 \\ 0 & G \end{array} \right) := \text{UN BLOQUE}(A_1)$

[CI2.3]: Reconstruir la matriz A orlando B por la izquierda y arriba con las filas y columnas suprimidas

[CI2.4]: $j := j + gr(g)$. $A := B$

El procedimiento anterior puede aplicarse a cualquier matriz orlada $\left(\begin{array}{c|c} A & R \\ \hline Q & \end{array} \right)$

Para $Q = R = I_n$ se obtiene $\left(\begin{array}{c|c} C & P^{-1} \\ \hline P & \end{array} \right)$ tal que $P^{-1}AP = C$ es forma cíclica de A .

Procedimiento **MINIMO**:

Entrada: Una matriz A cuadrada sobre K

Salida: Una matriz $\begin{pmatrix} C(p) & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ semejante sobre K
donde p es el polinomio mínimo de A .

[MI1]: $C := \mathbf{CICLICA}(A)$

[MI2]: Sean $(j_1, \dots, j_r)$ los índices de columnas
que encabezan las cajas de C .

[MI3]: Sumar a la 1^a columna de C las $(j_2, \dots, j_r)$.

[MI4]: Restar a las filas $(j_2, \dots, j_r)$ la primera.

[MI5]: Aplicar **UN BLOQUE** a la matriz obtenida.

El procedimiento anterior puede aplicarse a cualquier matriz orlada $\left(\frac{A}{Q} \middle| \frac{P}{Q}\right)$

Procedimiento **RACIONAL**:

Entrada: Una matriz A cuadrada de orden n sobre K

Salida: La forma racional de A

[RAC1]: (Iniciar el contador j al valor 0) $j := 0$

[RAC2]: Mientras $j < n - 1$ efectuar los siguientes pasos:

[RAC2.1]: Sea A_1 la submatriz de A que resulta de
suprimir las filas y columnas $1, \dots, j$

[RAC2.2]: $B := \begin{pmatrix} C(p) & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} := \mathbf{MINIMO}(A_1)$

[RAC2.3]: Reconstruir la matriz A orlando B por la izquierda
y arriba con las filas y columnas suprimidas.

[RAC2.4]: (Actualizar el valor del contador j) $j := j + gr(p)$.

El procedimiento anterior aplicado a la matriz orlada $\left(\frac{A}{I_n} \middle| \frac{I_n}{I_n}\right)$ da como
salida $\left(\frac{F}{P} \middle| \frac{P^{-1}}{P}\right)$ tal que $P^{-1}AP = F$ es la forma racional ó de Frobenius de
 A .

Procedimiento **REDUCE**:

Entrada: Una matriz compañera $C = C(f)$ sobre K

Salida: La forma cíclica irreducible G de C .

[RED1]: Sea $f = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ la factorización
completa, sobre K , de f

[RED2]: $G := \text{diag}[C(p_1^{m_1}), \dots, C(p_r^{m_r})]$

Procedimiento **REDUCEP**:

Entrada: Una matriz compañera $C = C(f)$ sobre K

Salida: La forma cíclica irreducible G de C
y una matriz Q tal que $Q^{-1}CQ = G$.

[REDP1]: Sea $f = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ la factorización completa, sobre K , de f

[REDP2]: Para $i = 1, \dots, r$ sea Q_i el pilar asociado a $p_i^{m_i}$

[REDP3]: $G := \text{diag}[C(p_1^{m_1}), \dots, C(p_r^{m_r})]$ y $Q = (Q_1, \dots, Q_r)$

Procedimiento **IRREDUCIBLE**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K

Salida: La forma canónica irreducible G de A .

[IRRE1]: Sea $\text{diag}[C_1, \dots, C_r] = \mathbf{CICLICA}(A)$

[IRRE2]: Para $i = 1, \dots, r$ sea $G_i = \mathbf{REDUCE}(C_i)$

[IRRE3]: Escribir $G = \text{diag}[G_1, \dots, G_r]$

Procedimiento **IRREDUCIBLEP**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K

Salida: La forma canónica irreducible G de A
y una matriz T tal que $T^{-1}AT = G$.

[IRREP1]: Orlar la matriz A con la matriz unidad

$$A_1 = \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$$

[IRREP2]: Sea $\left(\frac{\text{diag}[C_1, \dots, C_r]}{P} \right) = \mathbf{CICLICA}(A_1)$

[IRREP3]: Para $i = 1, \dots, r$ sea $\{G_i, Q_i\} = \mathbf{REDUCEP}(C_i)$

[IRREP4]: Sea $Q := \text{diag}[Q_1, \dots, Q_r]$ y $T = PQ$. Escribir
 $G = \text{diag}[G_1, \dots, G_r]$ y T

Procedimiento **JORDAN-COMPA**:

Entrada: Una matriz compañera $C = C(f)$ sobre K

Salida: Su forma de Jordan J .

[JC1]: Sea $f = (x - t_1)^{m_1} \cdots (x - t_r)^{m_r}$

[JC2]: $J := \text{diag}[J_{m_1}(t_1), \dots, J_{m_r}(t_r)]$

Procedimiento **JORDAN-COMPAP**:

Entrada: Una matriz compañera $C = C(f)$ sobre K

Salida: Su forma de Jordan J
y una matriz Q tal que $Q^{-1}CQ = J$.

[JCP1]: Sea $f = (x - t_1)^{m_1} \cdots (x - t_r)^{m_r}$

[JCP2]: Para $i = 1, \dots, r$ sea Q_i el pilar asociado a t_i

[JCP3]: $J := \text{diag}[J_{m_1}(t_1), \dots, J_{m_r}(t_r)]$ y $Q = (Q_1, \dots, Q_r)$

Procedimiento **JORDAN**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K

Salida: Su forma de Jordan J

[J1]: Sea $\text{diag}[C_1, \dots, C_r] = \mathbf{CICLICA}(A)$

[J2]: Para $i = 1, \dots, r$ sea $J_i = \mathbf{JORDAN-COMPA}(C_i)$

[J3]: Escribir $J = \text{diag}[J_1, \dots, J_r]$

Procedimiento **JORDANP**:

Entrada: Una matriz A de orden n sobre K

Salida: Su forma de Jordan J
y una matriz P tal que $P^{-1}AP = J$.

[JP1]: Orlar la matriz A con la matriz unidad

$$A_1 = \begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$$

[JP2]: Sea $\left(\frac{\text{diag}[C_1, \dots, C_r]}{T} \right) = \mathbf{CICLICA}(A_1)$

[JP3]: Para $i = 1, \dots, r$ sea $\{J_i, Q_i\} = \mathbf{JORDAN-COMPAP}(C_i)$

[JP4]: Sea $Q := \text{diag}[Q_1, \dots, Q_r]$ y $P = TQ$. Escribir
 $J = \text{diag}[J_1, \dots, J_r]$ y P

ESPACIOS METRICOS

Procedimiento **DIAGONALC**:

Entrada: Una matriz simétrica A sobre K

Salida: Matrices P regular y D diagonal tales que $P^tAP = D$

- [Dc1]: Orlar la matriz A por debajo con la matriz I_n .
- [Dc2]: Si $A = (0)$, $D = A$ y $P = I_n$.
- [Dc3]: Si existe $a_{ii} \neq 0$ ir a [Dc5].
- [Dc4]: Sea $a_{ij} \neq 0$ Sumar a la fila i la j y a la columna i la j .
- [Dc5]: Si $i \neq 1$, permutar las filas y columnas i y 1.
- [Dc6]: Mediante operaciones elementales hacer ceros en la primera fila, a partir del segundo lugar.
- [Dc7]: Colocar ceros en la primera columna, desde el lugar 2 a n .
- [Dc8]: Iterar desde Dc3 en la submatriz formada por las filas 2 a $2n$ y columnas 2 a n .
- [Dc9]: Una vez obtenida una submatriz diagonal en las líneas 1 a n , la matriz P regular es la submatriz formada por las filas $n + 1$ a $2n$.

Procedimiento **CHOLESKY**:

Entrada: Una matriz simétrica A de orden n sobre K
con los $n - 1$ primeros menores angulares no nulos

Salida: Matrices L triangular inferior con $p_{ii} = 1$ y
 D diagonal tales que $A = LDL^t$

- [Ch1]: Sean $D := A$ y $L := I_n$.
- [Ch2]: Para $k = 1$ hasta $n - 1$
 - [Ch2.1]: Mediante operaciones elementales en las columnas de D hacer ceros en la fila k , a partir del lugar $k + 1$.
 - [Ch2.2]: Sean $t_{k+1}, \dots, t_n$ los escalares utilizados en las operaciones elementales del paso anterior.
Colocar $(-t_{k+1}, \dots, -t_n)^t$ en la columna k -sima de L a partir del lugar $k + 1$.
 - [Ch2.3]: Escribir ceros en la k -sima columna de D por debajo del término (k, k) .
- [Ch3]: Escribir D y L . FIN.

Procedimiento **ORTOGONAL**:

Entrada: Un producto escalar sobre V de m.c. A en base (v_i) ,
y una familia $w_j = b_{j1}v_1 + \cdots + b_{jn}v_n, j = 1, \dots, p$ de V .

Salida: Una base del complemento ortogonal $(w_1, \dots, w_p)^\perp$

[Or1]: Sea $B = (b_{ij})$. Efectuar el producto BA .

[Or2]: Calcular la nulidad de BA .

[Or3]: Sea $(c_{k1}, \dots, c_{kn})^t, k = 1, \dots, s$ la familia obtenida.
Escribir $u_k = \sum_{j=1}^n c_{kj}v_j, k = 1, \dots, s$

Procedimiento **DIAGONALH**:

Entrada: Una matriz hermitiana A sobre K complejo.

Salida: Matrices P regular y D diagonal tales que $P^*AP = D$.

[DH1]: Orlar la matriz A por debajo con la matriz I_n .

[DH2]: Si $A = (0)$, $D = A$ y $P = I_n$.

[DH3]: Si existe $a_{kk} \neq 0$ ir a DH6.

[DH4]: Si $Re(a_{kj}) \neq 0$ sumar a la fila k la j
y a la columna k la j . Ir al paso DH6.

[DH5]: Sea $a_{kj} \neq 0$; sumar a la fila k la fila j
multiplicada por i y, a continuación,
sumar a la columna k la j multiplicada por $-i$.

[DH6]: Si $k \neq 1$, permutar las filas y columnas k y 1.

[DH7]: Mediante operaciones elementales hacer ceros
en la primera fila, a partir del segundo lugar.

[DH8]: Colocar ceros en la primera columna,
desde el lugar 2 a n .

[DH9]: Iterar desde DH3 en la submatriz formada
por las filas 2 a $2n$ y columnas 2 a n .

[DH10]: Una vez obtenida una submatriz diagonal
en las líneas 1 a n , la matriz P regular
es la submatriz formada por las filas $n+1$ a $2n$.

Procedimiento **SEUDOINVERSA**:

Entrada: Una matriz A real o compleja.

Salida: Su pseudoinversa $A^\dagger$

[Se1]: Trasponiendo y conjugando, escribir la matriz adjunta A^* de A .

[Se2]: Calcular una base de la nulidad de A y sea M la matriz cuyas filas contienen los conjugados de la base.

[Se3]: Hacer operaciones elementales en las filas de $\left(\begin{array}{c|c} A^*A & A^* \\ \hline M & 0 \end{array} \right)$ hasta obtener $\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline \$ & * \end{array} \right)$

[Se4]: $A^\dagger := B$

Procedimiento **SCHMIDT_AUX**:

Entrada: Una familia libre $(v_1, \dots, v_p, w)$ en $(V, \langle, \rangle)$ unitario con $v_i v_j = \delta_{ij}$

Salida: Un vector v_{p+1} tal que $(v_1, \dots, v_{p+1})$ es ortogonal.

[SMX1]: Para $i = 1, \dots, p$ calcular $t_i = \frac{-\langle v_i, w \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$

[SMX2]: $v_{p+1} := t_1 v_1 + \dots + t_p v_p + w$

Procedimiento **SCHMIDT**:

Entrada: Una base $(u_1, \dots, u_n)$ en $(V, \langle, \rangle)$ unitario.

Salida: Una base ortogonal de $(V, \langle, \rangle)$

[SM1]: $i := 1; v_i := u_i$

[SM2]: Mientras $i < n$ hacer

[SM2.1]: $v_{i+1} := \mathbf{SCHMIDT_AUX}(v_1, \dots, v_i, u_{i+1})$

[SM2.2]: $i := i + 1$

[SM3]: Escribir $(v_1, \dots, v_n)$

Procedimiento **GRAM_SCHMIDT**:

Entrada: Una familia ortogonal $(v_1, \dots, v_p)$
en $(V, \langle, \rangle)$ unitario.

Salida: Una base ortogonal de $(V, \langle, \rangle)$ conteniendo
a $(v_1, \dots, v_p)$

[GSM1]: $i := p$;
[GSM2]: Mientras $i < n$ hacer
 [GSM2.1]: Elegir un vector w tal que la familia
 $(v_1, \dots, v_i, w)$ sea libre.
 [GSM2.2]: $v_{i+1} := \mathbf{SCHMIDT_AUX}(v_1, \dots, v_i, w)$
 [GSM2.3]: $i := i + 1$
[GSM3]: Escribir $(v_1, \dots, v_n)$

Procedimiento **QR**:

Entrada: Una matriz A real o compleja con r columnas
y rango igual a r .

Salida: Su factorización QR .

[QR1]: $P^1 := A^1$; $R := I_r$
[QR2]: Desde $j = 2$ hasta r hacer
 [QR2.1]: $P^j := \mathbf{SCHMIDT_AUX}(P^1, \dots, P^{j-1}, A^j)$
 [QR2.2]: Sean $(t_1, \dots, t_{j-1})$ los coeficientes obtenidos
 en el paso anterior.
 [QR2.3]: Colocar $(-t_1, \dots, -t_{j-1})^t$ en la columna j -sima de
 R a partir del lugar $(1, j)$.
[QR3]: Desde $j = 1$ hasta r hacer
 [QR3.1]: $s := \|P^j\|$; $Q^j := s^{-1}P^j$
 [QR3.2]: Multiplicar la fila j -sima de R por s .
[QR4]: Escribir R y $Q := (Q^1, \dots, Q^r)$

Procedimiento **SCHUR**:

Entrada: Una matriz A sobre K real o complejo tal que
 $|xI_n - A|$ tiene todas sus raíces en K .

Salida: Una matriz Q tal que $Q^*Q = I_n$ y Q^*AQ es triangular superior.

[SCH1]: Mediante el procedimiento **JORDAN**, obtener
 una matriz P tal que $P^{-1}AP$ es la forma de Jordan de A .
[SCH2]: Sea S la matriz P con las columnas en orden inverso.
[SCH3]: Sea T la matriz que resulta de aplicar **SCHMIDT**
 a las columnas de S .
[SCH4]: Escribir la matriz Q que resulta de dividir las columnas
 de T por su norma.

Procedimiento **ESPECTRAL**:

Entrada: Una matriz A normal.

Salida: Una matriz P unitaria tal que P^*AP es la diagonal de valores propios de A

- [ESP1]: $[R, D] := \mathbf{DIAGONALIZA}(A)$
- [ESP2]: Aplicar **SCHMIDT**, a cada bloque de columnas de R por cada valor propio.
- [ESP3]: Sea Q la matriz que resulta de yuxtaponer las columnas obtenidas en el paso anterior.
- [ESP4]: Dividir las columnas de Q por su norma, escribiendo la matriz P resultante.

Procedimiento **NORMAL-REAL**:

Entrada: Una matriz A normal real de orden n

Salida: Una matriz P ortogonal tal que P^tAP es suma diagonal de bloques normales de orden ≤ 2 .

- [NR1]: Calcular los valores propios de A : $t_1, \dots, t_r$
Si $r = 0$ ir al paso [NR6] con $v = e_1$ y P la familia vacía.
- [NR2]: Aplicando **SCHMIDT** obtener una base ortonormal $u_1, \dots, u_s$ en $V(t_1) \perp \dots \perp V(t_r)$. Sea $P = (u_1, \dots, u_s)$ y D la matriz diagonal $\text{diag}[t_1, \dots, t_1, \dots, t_r, \dots, t_r]$, de valores propios repetidos tantas veces como lo indique su multiplicidad.
- [NR3]: Si $s = n$ FIN.
- [NR4]: Si $n - s = 2$, aplicar **GRAM_SCHMIDT** a P , para obtener (P, v_1, v_2) ortonormal. Ir al paso [NR8]
- [NR5]: Sea (P, w) libre y $v = \mathbf{SCHMIDT_AUX}(P, w)$
- [NR6]: Calcular el polinomio mínimo f de v y buscar un factor irreducible p de f . Sea $f/p = \sum c_i x^i$
- [NR7]: Sea $w = \sum c_i A^i v$; aplicar **SCHMIDT** a (w, Aw) .
Sea (v_1, v_2) la familia ortonormal obtenida.
- [NR8]: Resolver el sistema $(v_1, v_2)X = Av_2$. Sea $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ su (única) solución. Si $b < 0$, permutar v_1 y v_2 y poner $b := |b|$.
- [NR9]: Yuxtaponer las columnas (v_1, v_2) a P .
- [NR10]: Yuxtaponer diagonalmente el bloque $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ a D .
- [NR11]: $s := s + 2$; ir al paso [NR3] .

Procedimiento **ISOMETRIA**:

Entrada: Una matriz A ortogonal de orden n

Salida: Una matriz P ortogonal tal que $P^t A P$ es suma diagonal de matrices ortogonales de orden ≤ 2 .

- [ISO1]: Ver si 1 y/ó -1 son valores propios de A .
En caso negativo, ir al paso [ISO6] con $v = e_1$ y P la familia vacía.
- [ISO2]: Aplicando **SCHMIDT** obtener una base ortonormal $u_1, \dots, u_s$ en $V(1) \perp V(-1)$. Sea $P = (u_1, \dots, u_s)$ y D la matriz diagonal $\text{diag}[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$, con tantos 1 y -1 , como lo indique su multiplicidad.
- [ISO3]: Si $s = n$ FIN.
- [ISO4]: Si $n - s = 2$, aplicar **GRAM_SCHMIDT** a P , para obtener (P, v_1, v_2) ortonormal. Ir al paso [ISO8]
- [ISO5]: Sea (P, w) libre y $v = \mathbf{SCHMIDT_AUX}(P, w)$
- [ISO6]: Calcular el polinomio mínimo f de v y buscar un factor irreducible p de f . Sea $f/p = \sum c_i x^i$
- [ISO7]: Sea $w = \sum c_i A^i v$; aplicar **SCHMIDT** a (w, Aw) .
Sea (v_1, v_2) la familia ortonormal obtenida.
- [ISO8]: Resolver el sistema $(v_1, v_2)X = Av_2$. Sea $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ su (única) solución. Si $b < 0$, permutar v_1 y v_2 y poner $b := |b|$.
- [ISO9]: Yuxtaponer las columnas (v_1, v_2) a P .
- [ISO10]: Yuxtaponer diagonalmente el bloque $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ a D .
- [ISO11]: $s := s + 2$; ir al paso [ISO3] .

Procedimiento **CUADRICA**:

Entrada: Un polinomio f de grado 2 con coeficientes reales en n indeterminadas.

Salida: La ecuación canónica métrica de la cuádrica $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, así como el nuevo sistema de referencia asociado.

[CUAD1]: Escribir la matriz simétrica de orden $n + 1$, A , cuyo término

$$(i, j) \text{ es } \begin{cases} \text{término independiente de } f \text{ si } i = j = 0 \\ 1/2 \text{ coeficiente de } x_i \text{ si } i \geq 1, j = 0 \\ \text{coeficiente de } x_i^2, \text{ si } i = j \geq 1 \\ 1/2 \text{ coeficiente de } x_i x_j, \text{ si } 1 \leq j < i \end{cases}$$

[CUAD2]: Calcular una matriz P_{00} ortogonal tal que

$$P_{00}^t A_{00} P_{00} = \text{diag}[d_1, \dots, d_n], d_1 \geq \dots \geq d_r \neq 0, d_{r+j} = 0$$

Si $r = n$ ir al paso [CUAD4.1]

[CUAD3]: Calcular el rango de A

[CUAD4]: Si $\text{rang}(A) - r < 2$

[CUAD4.1]: La ecuación canónica métrica es

$$d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2 = -\frac{t}{d_1 \dots d_r}$$

donde t es el coeficiente de x^{n-r} en $\det(xI - A)$

afectado del signo $-$ si r es par

[CUAD4.2]: Sea $P = \text{diag}[1, P_{00}]$ y $-b_k$ el término de lugar $(0, k)$, $k = 1 \dots, r$ en la matriz $P^t A P$.

[CUAD4.3]: El nuevo sistema de referencia es $(N, v_1, \dots, v_n)$

donde los vectores (v_i) son las columnas de P_{00}

y N es el punto de coordenadas

$$(b_1/d_1, \dots, b_r/d_r, 0, \dots, 0) P_{00}^t \quad \text{FIN.}$$

[CUAD5]: Si $\text{rang}(A) - r = 2$

[CUAD5.1]: La ecuación canónica métrica es

$$d_1 x_1^2 + \dots + d_r x_r^2 = 2 \left(+\sqrt{-\frac{t}{d_1 \dots d_r}} \right) x_{r+1}$$

donde t es el coeficiente de x^{n-r-1} en $\det(xI - A)$

afectado del signo $-$ si r es impar

[CUAD5.2]: Sea $P = \text{diag}[1, P_{00}]$ y $-b_k$ el término de lugar

$(0, k)$, $k = 0, \dots, n$ en la matriz $P^t A P$.

[CUAD5.3]: Sea $d_0 = b_0 + \sum_{i=1}^r b_i^2/d_i$ y $b_k \neq 0, k \geq r + 1$

[CUAD5.4]: Si $k \neq r + 1$, permutar las columnas k y $r + 1$ de P_{00} y los valores de b_{r+1} y b_k .

[CUAD5.5]: Sea $p = \sqrt{b_{r+1}^2 + \dots + b_n^2}$. Aplicando el procedimiento

GRAM-SCHMIDT, calcular una matriz M ortogonal

de orden $n - r$ cuya primera columna sea

$$p^{-1}(b_{r+1}, \dots, b_n)^t. \text{ Sea } R = \text{diag}[I_r, M]$$

[CUAD5.6]: El nuevo sistema de referencia es $(Q, w_1, \dots, w_n)$

donde (w_i) son las columnas de $P_{00} R$ y Q es el punto de coordenadas

$$(b_1/d_1, \dots, b_r/d_r, -d_0/(2b_{r+1}), 0, \dots, 0) P_{00}^t \quad \text{FIN.}$$