

Prefacio

El presente libro se escribe como fruto de una veintena de años explicando Álgebra Lineal y Geometría en diferentes Centros de las Universidades de Zaragoza, Valladolid, País Vasco y Cantabria. Su principal destinatario es el estudiante y, si se me permite el atrevimiento, el profesor de Álgebra Lineal en las distintas Facultades y Escuelas Técnicas.

El texto pretende responder a una preocupación cada vez más acuciante: el Álgebra Lineal que se explica ¿es demasiado abstracta? ¿Es necesario, por ejemplo, un desarrollo sistemático previo de la teoría de espacios vectoriales y aplicaciones lineales, quizá desconocida para Gauss, para poder exponer adecuadamente la resolución de sistemas de ecuaciones lineales?

Sin necesidad de olvidar el rigor matemático preciso, se presenta un libro cuyo propio título -“**Procedimientos simbólicos en Álgebra Lineal**”- quiere reflejar la idea que subyace a lo largo de todo su contenido. No se le escapa al profesional de esta materia que todo sistema de cálculo simbólico, que *se precie*, contiene un paquete más o menos grande de rutinas ó **procedimientos** para realizar los cálculos que se exigen a cualquier estudiante de Álgebra Lineal: aritmética matricial, rango de matrices, cálculo de inversas y determinantes, resolución de sistemas lineales, formas canónicas racional¹ y de Jordan, signatura, ortogonalización de Gram-Schmidt, pseudoinversa de una matriz, clasificación de cónicas y cuádricas ...

De esta manera me atrevo a afirmar que la manipulación en Álgebra Lineal, aun en sus aspectos más geométricos como aplicaciones lineales y formas cuadráticas, es manipulación simbólica de matrices.

El libro se divide en cuatro capítulos. El primero de ellos: **MATRICES Y SISTEMAS** está destinado a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con el punto de mira en la eliminación gaussiana; los conceptos básicos a desarrollar en este capítulo son *rango* y *nulidad* de una matriz.

El método expuesto para obtener el rango de una matriz consiste en la manipulación elemental en sus filas a fin de obtener una matriz escalonada. Basta contar las filas no nulas. La demostración de este hecho, tónica que se sigue fielmente a lo largo del texto, es de tipo constructivo ó descriptivo. Es decir, la propia demostración exhibe un método para obtener el resultado deseado.

Con carácter eminentemente práctico, a continuación de este tipo de resultados se describe un **procedimiento** simbólico que ejecuta el algoritmo deseado. Simbólico quiere decir dos cosas: 1) Los cálculos se hacen con precisión infinita, es decir sin truncamiento ni redondeos y 2) El procedimiento es aplicable a matrices cuyos términos sean letras o símbolos.

El lector podrá, si lo desea, implementar estos procedimientos en su propio ordenador, realizando así un buen ejercicio de comprensión del algoritmo.

¹ó de Frobenius

Algunos cursos de Álgebra Lineal prefieren obviar los determinantes, aduciendo que es una teoría tediosa, cuya presentación correcta desde el punto de vista matemático, exige conceptos complicados y quizá fuera de contexto como son el grupo simétrico y las funciones multilineales. Nada más lejos de mi propósito. Siguiendo las excelentes guías de recientes textos publicados, se revela como esencial en el concepto de determinante el hecho de que es una función que *conserva* las operaciones elementales en las líneas de una matriz. Las clásicas propiedades, A es regular si y sólo si $\det(A) \neq 0$, $\det(A) = \det(A^t)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ son consecuencia inmediata.

El capítulo II, **SEMEJANZA DE MATRICES**, contiene quizá los primeros conceptos nuevos para el estudiante de primer curso. Como tónica general en el texto, todo concepto o resultado se introduce previamente bien por un ejemplo o bien por unos comentarios en relación al tipo de problema que se quiere resolver.

Concretamente, es conocido que problemas de tipo demográfico pueden ser interpretados en términos de aritmética matricial. Su resolución conlleva el cálculo de potencias, que pueden ser elevadas, de matrices. Uno de los problemas que se pretende resolver en este capítulo es efectuar de manera sencilla dichas potencias.

Bajo esta óptica se introduce el concepto de polinomio mínimo de una matriz, valores y vectores propios, forma de Jordan. . .

Desde el punto de vista de la manipulación práctica debe hacerse notar que los procedimientos descritos no involucran matrices polinómicas, lo que indudablemente influye de manera notable en la reducción de la complejidad de los algoritmos.

El lector estará, si ha seguido con aprovechamiento hasta aquí, en condiciones de afrontar la teoría abstracta de **ESPACIOS VECTORIALES**, objeto del capítulo III. La manipulación realizada en el capítulo I de n -tuplas de K^n , *único* espacio vectorial de dimensión n sobre K , será el soporte adecuado para el desarrollo de los conceptos básicos de dependencia e independencia lineal, bases, dimensión, aplicaciones lineales. . .

El cuarto capítulo del libro, de marcado carácter geométrico, se dedica al estudio de los **ESPACIOS VECTORIALES METRICOS**; con todo su presentación seguirá basándose en la manipulación simbólica de matrices: partiendo de la congruencia de matrices llegaremos al estudio de los *buenos* espacios geométricos: los espacios euclídeos.

En tales espacios merece ser destacada la posibilidad de considerar la (matriz) proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio, concepto que da lugar a una manera de ver los clásicos *mínimos cuadrados* y la, no tan clásica en este tipo de textos, *seudoinversa* de una aplicación lineal f ; se describe un sencillo **procedimiento** para su construcción y se recuperan los teoremas de Moore y Penrose, pioneros en el concepto.

En un espacio euclídeo, las referencias adecuadas son las bases ortonormales para cuya obtención se describe el conocido proceso de Gram-Schmidt, versión geométrica de la denominada factorización QR de una matriz.

Finaliza el capítulo con una bonita aplicación geométrica de todo lo estudiado en el texto: la clasificación afín y métrica de cuádricas en $\mathbf{R}^n$, con especial énfasis en los casos $n = 2, 3$.

A la manera de los capítulos I y II la mayor parte de las demostraciones son constructivas, destacándose a continuación los correspondientes **procedimientos** que construyen el objeto postulado.

El marcado carácter didáctico del texto hace incluir una amplia lista de ejercicios al final de cada tema. Tales ejercicios han sido desarrollados por los estudiantes durante la actividad docente del autor en esta materia.

La Bibliografía incluída no es exhaustiva, a fin de que sea una ayuda realista y al alcance del estudiante de los primeros cursos de Facultades o Escuelas Técnicas.

Razones de tipo práctico han aconsejado recopilar al final del texto todos los procedimientos.

El texto es autocontenido y ofrece una panorámica bastante completa del tema, a un nivel elemental. Con todo, el lector puede seleccionar parte, sin menoscabo del esqueleto esencial del Álgebra Lineal Elemental. Asimismo razones de tipo didáctico pueden aconsejar la permutación de los capítulos II y III.

Los capítulos presentados dan lugar cómodamente a un semestre de explicación, por lo que en una estructura docente cuatrimestral, puedo sugerir dos tipos de actuación: a) En el caso de contar con un sólo cuatrimestre, suplir el capítulo I con un breve repaso; b) En el caso de contar con dos cuatrimestres, el texto puede complementarse de varias maneras: Métodos numéricos en Álgebra Lineal, una introducción al Álgebra Multilineal, y/o una introducción a los Espacios Afín y Proyectivo, tópicos no contemplados en el texto y para los que existen especialistas que lo harán mejor sin ninguna duda.

Debo presentar mis disculpas por las posibles erratas que tenga el texto. El número de erratas del mismo es necesariamente finito, pues el conjunto de caracteres lo es; sin embargo, ¿existe algún **procedimiento** finito para corregir las erratas de un manuscrito?

Quisiera agradecer a todos los que han hecho posible la redacción de este texto: a mis maestros, no puedo dejar de citar a D. Juan Sancho de San Román, a mis colegas, que directa o indirectamente enseñan mucho, a los autores de libros y artículos en los que he aprendido, a Juan Miguel Gracia, Joos Heintz, José Enrique Morais, Luis Miguel Pardo, y Carlos Ruiz de Velasco que han leído el manuscrito, y... a Juana, Patricia, Juan y Pedro que, día a día, comparten conmigo las dichas y desdichas de la tarea docente en la Universidad.

J.M. de Olazábal