La forma canónica de Jordan

Una de las formas canónicas clásicas de una matriz, es la **forma de Jordan**; su fundamental interés reside en la sencillez de dicha matriz, lo que la convierte en inestimable herramienta de aplicación a otros tipos de computación, como la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, mediante la denominada **exponencial de una matriz**.

La célula básica de la forma de Jordan es el bloque de Jordan $J_m(t) = tI_m + U$, donde U es la matriz compañera de x^m. Así, $U^m = (0)$, y, desde el punto de vista de la manipulación algebraica, se tiene la interesante propiedad:

$$J_m(t)^n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} t^{n-k}U^k & \text{si } n < m \\ \sum_{k=0}^{m-1} t^{n-k}U^k & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

Esta propiedad, de tipo aritmético, extiende naturalmente a las matrices de la forma:

$$\mathrm{diag}[J_{m_1}(t_1), \ldots, J_{m_r}(t_r)] \qquad (1)$$

En esta sección se prueba que, si las raíces de $|xI - A|$ pertenenecen[1] a K, A posee una matriz semejante de la forma anterior (1). Dicha matriz será única, salvo permutación de bloques, y recibirá el nombre de forma de Jordan de A.

El concepto clave es:

Dada una matriz compañera $C = C(f)$ de orden n y t un valor propio de multiplicidad m, se dice pilar asociado a t a la matriz $n \times m$ cuyas columnas contienen los coeficientes[2] del polinomio

$$(x-t)^k \frac{f}{(x-t)^m} = \frac{f}{(x-t)^{m-k}} \qquad k = 0, \ldots, m-1$$

Por ejemplo, para $C = C(f), f = (x-3)^2(x^2-4)$ los pilares asociados a los valores propios $3, 2$ y -2 son respectivamente:

$$\begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 0 & -4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -18 \\ 21 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado básico es:

Sea $C = C(f)$ una matriz compañera de orden n y supongamos que $f = (x-t_1)^{m_1} \cdots (x-t_r)^{m_r}$; sea Q la matriz $[Q_1, \ldots, Q_r]$ donde Q_k es el pilar asociado al valor propio t_k. Entonces, Q es regular y

$$Q^{-1}CQ = \mathrm{diag}[J_{m_1}(t_1), \ldots, J_{m_r}(t_r)]$$

Como en la sección anterior, ambos concepto y enunciado conducen a los correspondientes procedimientos de cálculo

[1] lo que es siempre cierto para el cuerpo de los complejos

[2] completando con los ceros precisos