

La forma canónica irreducible

En esta sección se aprende a escindir una matriz compañera, cuyo polinomio mínimo sea reducible sobre K , en suma diagonal de matrices compañeras. En consecuencia, el tamaño de las cajas de la forma racional decrecerá, lo que representa una ventaja en la posterior manipulación algebraica. Sin embargo, debe quedar bien claro, que toda la sección exige un algoritmo de factorización de polinomios, lo que está fuera de contexto, por lo que su interés en algunos casos puede quedar relegado.

Se incluye esta sección porque los métodos a describir son los mismos, incluso más sencillos, que los que se utilizarán para calcular la forma de Jordan. Por tanto, desde el punto de vista de la estrategia, puede constituir un buen entrenamiento.

El primer teorema se entenderá mejor si previamente consideramos un ejemplo:

Sea K el cuerpo de los números racionales y C la matriz compañera del polinomio $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$. Para cada uno de estos 2 factores de grado 2, escribamos la matriz 4×2 , cuyas columnas son los coeficientes del otro factor, desplazados hacia abajo, hasta completar la columna:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $Q = (Q_1 Q_2) =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, Q es regular y

$$Q^{-1}CQ = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 2 \\ & & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Más precisamente,

Dado un polinomio f de grado n y un factor g de f de grado m , se dice pilar asociado a g a la matriz $n \times m$ cuyas columnas contienen los coeficientes del polinomio¹ $x^k f/g$, $k = 0, \dots, m-1$.

El resultado clave es:

Sea $C = C(f)$ una matriz compañera de orden n y $f = p_1 \cdots p_r$ una factorización coprime de f . Sea Q la matriz $[Q_1, \dots, Q_r]$ donde Q_j es el pilar asociado a p_j . Entonces, Q es regular y

$$Q^{-1}CQ = \text{diag}[C(p_1), \dots, C(p_r)]$$

Ambos concepto y enunciado conducen a los correspondientes procedimientos de cálculo.

¹completando con los ceros necesarios