

Diagonalización de matrices hermitianas

La exposición de la sección anterior tomó como punto de partida el producto escalar *ordinario* sobre K^n :

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \rightsquigarrow x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Las excelentes propiedades de este producto para el caso real se resumen en el hecho de que el producto escalar de un vector por sí mismo es positivo, siendo nulo exclusivamente para el vector cero.

Sin embargo, para el caso complejo tal producto escalar ordinario presenta anomalías del tipo:

- $(1, 2i)(1, 2i) = 1 + 4i^2 = -3 < 0$
- $(1, i)(1, i) = 1 + i^2 = 0$

No es éste pues un buen producto escalar para $\mathbf{C}^n$; la literatura clásica arregla fácilmente este problema mediante la consideración del siguiente producto:

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \widehat{x}_1 y_1 + \dots + \widehat{x}_n y_n$$

Ahora,

- $((1, 2i)(1, 2i)) = 1 - 4i^2 = 5 > 0$
- $((1, i)(1, i)) = 1 - i^2 = 2 \neq 0$

De hecho se recuperan las propiedades del producto anterior para el caso real: El producto escalar de un vector por sí mismo es positivo, siendo nulo exclusivamente para el vector cero.

Dada una matriz hermitiana A se considera la aplicación

$$\mathcal{A}: \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \longrightarrow K \text{ dada por } (X, Y) \rightsquigarrow X^* A Y$$

Cambios de bases en $\mathbf{C}^n$ conducen a la relación de matrices $\sim$ -congruentes, cuyas clases quedan descritas por el rango y la signatura de A .