EJERCICIOS SOBRE VARIEDADES LINEALES EN $\mathbf{K}^n$

1. Probar que $((1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ es una base de K^n.

2. Probar que la familia

$$((2,0,0,-2),(2,1,-1,-2),(4,1,-2,-1),(0,1,1,1))$$

   es una base de $\mathbf{R}^4$. Escribir el vector $(4,-3,5,-1)$ como combinación lineal de dicha base.

3. Probar que $((1,0,0),(0,1,0))$ es una base de $\{(x,y,0) \mid x,y,\in K\}$

4. Si $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_r \in K{<}\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m{>}$ entonces

$$K{<}\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_r{>} \subseteq K{<}\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m{>}$$

5. Probar que toda variedad lineal es un subespacio.

6. Decir, razonadamente, cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{Q}^4$ son subespacios vectoriales:

   - $S = \{(a,-6a,b,a-b) \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$
   - $T = \{(a,b,c,d) \mid 3a-5c=0\}$
   - $U = \{(a,b,c,d) \mid a+6c=1\}$

7. Probar que una parte no vacía S de V es subespacio si y sólo si cualquier c.l. de vectores de S es un vector de S.

8. Calcular x e y para que

$$\mathbf{R}{<}(x,1,-1,2),(1,y,0,3){>} = \mathbf{R}{<}(1,-1,1,-2),(-2,0,0,-6){>}$$

9. Probar que si la familia de vectores $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ es libre, y t y $s \neq 0$ son escalares, la familia $(s\boldsymbol{u}, t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$ es también libre.

10. (Todo subespacio es una variedad lineal)

    (a) Probar que si $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_r$ es libre y $\boldsymbol{u}$ no está en su clausura lineal, la familia $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_r,\boldsymbol{u})$ es libre.

    (b) Sea S un subespacio de K^n. Probar que toda familia libre en S se puede prolongar a una base de S.

11. Sean S y T subespacios de K^n, $S \subseteq T$. Probar que $\dim S \leq \dim T$ y que $\dim S = \dim T \iff S = T$. Deducir que si A y B son matrices multiplicables, $\operatorname{rang}(AB) \leq \max(\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B))$.

12. Afirmar razonadamente o negar mediante un contraejemplo:
    - Todo vector es combinación lineal, de forma única, de una base.
    - Todo vector es combinación lineal, de forma única, de un sistema generador.
    - Todo vector es combinación lineal, de forma única, de una familia libre.
    - Si un vector es combinación lineal de una familia libre, los coeficientes son únicos.
13. Calcular una base de las variedades lineales generadas por las siguientes familias en $\mathbf{R}^4$:
    - $((1,2,3,0),(0,2,3,4),(2,2,0,1),(6,8,7,3))$
    - $((2,4,3,2),(1,0,-2,0),(3,4,1,2))$
    - $((2,5,11,7),(4,8,13,12),(2,3,2,5))$
14. Idem en $\mathbf{R}^3$, discutiendo según los valores del parámetro a:
    - $((a+2,a,a+1),(1,a-1,a+1),(1,1,1),(a+1,a+1,a+1))$
    - $((2,1,a+1),(-1,5,a-12),(1,6,a+2),(1,-2,a/2))$