EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Discutir y resolver, en su caso, los siguientes sistemas sobre el cuerpo de los números racionales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 5z & + & 9t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & - & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & - & 2t & = & 0 \\ & & 7y & - & 4z & - & 5t & = & 0 \\ 2x & - & 11y & + & 7z & + & 8t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. Discutir y resolver, en su caso, los sistemas sobre $\mathbf{Z}_5$ el cuerpo de los enteros módulo 5:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 3 \\ 5x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ -3x & - & 4y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 5z & + & 4t & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ 4x & - & 7y & + & z & - & 6t & = & -5 \end{array}\right.$$

3. Discutir y resolver, según los valores de m, con $K = \mathbf{R}$, el cuerpo de los números reales.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & my & + & 4z & = & 0 \\ x & + & y & + & 7z & = & 0 \\ mx & - & y & + & 13z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & m \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & (2-m)y & & & = & 0 \\ (2m+2)x & + & my & + & 2z & = & 2m-2 \\ (m+1)x & & & + & (m+1)z & = & m-1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (m+2)x & + & (m+2)y & + & (m+1)z & = & 2m+2 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} (m+2)x & + & (2m+4)y & + & (3m+6)z & = & 0 \\ (m+2)x & + & (m+2)y & + & 3(m+2)z & = & -(m+2) \\ (m+2)x & + & (3m+6)y & + & (3m+6)z & = & m+2 \\ (m+2)x & + & (3m+6)y & + & (4m+5)z & = & 4m+2 \end{array}\right.$$

4. Discutir y resolver según los valores de a con $K = \mathbf{Q}$, el cuerpo de los números racionales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} 2x & + & y & - & 4z & = & a+1 \\ -x & + & 5y & - & z & = & a-12 \\ x & + & 6y & - & 5z & = & a+2 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & = & a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcc} ax & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & a \\ x & + & y & + & az & + & t & = & a \\ x & + & y & + & z & + & at & = & a \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} (a+2)x & + & y & + & z & = & a-1 \\ ax & + & (a-1)y & + & z & = & a-1 \\ (a+1)x & & & + & (a+1)z & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} (4-a)x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & (4-a)y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & (8-a)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} (4a+12)x & + & (2a+13)y & + & (2a+6)z & = & 7-a \\ (2a+6)x & + & (4a+5)y & + & (a+3)z & = & 4a \\ (2a+6)x & + & (2a+6)y & + & (a+3)z & = & a+3 \\ (3a+6)x & + & (2a+6)y & + & (a+3)z & = & 0 \end{array}\right.$$

5. Idem según los valores de a con $K = \mathbf{C}$, el cuerpo de los números complejos.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc} x & + & ay & + & a^2z & = & 3 \\ \hat{a}x & + & y & + & az & = & 2 \\ \hat{a}^2x & + & \hat{a}y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

6. Discutir según los valores de a y b los siguientes sistemas sobre el cuerpo de los números racionales.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & by & + & az & + & bt & = & a+b+1 \\ 2x & + & 3by & + & az & + & 2bt & = & 3a+2b+1 \\ x & + & by & + & 2az & + & 2bt & = & 2b+2 \\ x & + & 2by & + & & + & 2bt & = & a+2b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & by & & & + & t & = & a+b \\ bx & + & ay & + & z & & & = & a-b \\ & & y & + & az & + & bt & = & a+1 \\ x & & & + & bz & + & at & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 1 \end{array}\right.$$

7. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2. Probar que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & ay & & & = & c \\ cx & & & + & az & = & b \\ & & cy & + & bz & = & a \\ (b+c)x & + & (a+c)y & + & (a+b)z & = & a+b+c \end{array}\right.$$

posee una única solución si y sólo si a, b y c son diferentes de 0_K. Determinar dicha solución.

8. Sea K un cuerpo cualquiera. Probar que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & m \\ ax & + & by & + & cz & + & dt & = & n \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & + & d^2t & = & p \\ a^3x & + & b^3y & + & c^3z & + & d^3t & = & q \end{array}\right.$$

posee una única solución si y sólo si los elementos a, b, c y d son distintos 2 a 2. Determinar dicha solución.

9. Sean $A \in M_{m\times n}(K)$ y $B \in M_{m\times p}(K)$. Probar:

   (a) S es solución de la ecuación matricial[1] $AX = B$ si y sólo si S^j es solución de $AX = B^j$, donde el superíndice j indica columna j-sima.

   (b) La ecuación matricial $AX = B$ posee solución si y sólo si
   $$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|B)$$

   (c) Si S_0 es una solución de la ecuación matricial $AX = B$ y r es el rango de A, el conjunto de soluciones es:
   $$\begin{array}{l} \{S_0\}, \text{ si } r = n \\ \{S \mid S = S_0 + NT\}, \text{ si } r < n \end{array}$$
   donde N es cualquier matriz cuyas columnas contengan una base de la nulidad de A, y T es una matriz arbitraria en $M_{n-r\times p}(K)$.

10. Probar que la inversa de una matriz regular es única.

11. Discutir y resolver, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones matriciales sobre $\mathbf{Q}$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Discutir en función de los valores de a y b, y resolver en los casos posibles el siguiente sistema matricial sobre $\mathbf{Q}$:
$$\begin{bmatrix} b & 1 & a & b \\ 3b & 2 & a & 2b \\ b & 1 & 2a & 2b \\ 2b & 1 & 0 & 2b \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a+b+1 & a \\ 3a+2b+1 & b \\ 2b+1 & 1 \\ a+2b & -a \end{bmatrix}$$

[1] es decir, $AS = B$