EJERCICIOS DE RANGO DE MATRICES

1. Calcular el rango de las siguientes matrices racionales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$

2. Calcular el rango de las siguientes familias en $\mathbf{R}^4$:
   - $((1,2,3,0),(0,2,3,4),(2,2,0,1),(6,8,7,3))$
   - $((2,4,3,2),(2,3,5,4),(3,4,1,2))$
   - $((3,2,1,3),(4,8,13,12),(2,3,2,5))$

3. Discutir, según los valores de a, el rango de la matriz racional:

$$\begin{bmatrix} a+2 & 1 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & 1 & a-1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a-1 \end{bmatrix}$$

4. Discutir, según los valores del parámetro a, el rango de las siguientes familias en $\mathbf{R}^3$:
   - $((a+2,a,a+1),(1,a-1,a+1),(1,1,1),(a+1,a+1,a+1))$
   - $((2,1,a+1),(-1,5,a-12),(1,6,a+2),(1,-2,a/2))$

5. Sean A,B,C,D,E,F,G,H,J,L matrices de tamaños adecuados. Probar que

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right] C = \left[\begin{array}{c} AC \\ \hline BC \end{array}\right] \quad D(E|F) = (DE|DF) \quad (G|H)\left[\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & L \end{array}\right] = (GJ|HL)$$

6. Sea E_{ij} la matriz cero salvo el término (i,j) que es 1. Probar que $E_{ij}A$ es la matriz todas cuyas filas son cero salvo la $i-$sima que es la $j-$sima fila A_j de A, y que AE_{ij} es la matriz todas cuyas columnas son cero salvo la $j-$sima que es la $i-$sima columna A^i de A. Deducir que

$$E_{ij}E_{rs} = \delta_{jr}E_{is} \text{ donde } \delta_{jr} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = r \\ 0, & \text{si } j \neq r \end{cases}$$

7. Probar que las únicas matrices cuadradas que conmutan con todas las demás son las matrices escalares.

8. Probar que $P_{ij} = P_{ij}(-1)Q_j(-1)P_{ji}(-1)P_{ij}(1)$

9. Dadas las matrices racionales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

encontrar matrices P y Q regulares que conduzcan a la matriz $[I_r, 0]$ respectiva. Encontrar asimismo M y N regulares tales que $B = MAN$.

10. Probar que la equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

11. Dada una matriz regular A de orden m, consíderese la matriz orlada, $2m \times m$, $B = \left[\frac{A}{I_m}\right]$. Probar que existen operaciones elementales en las columnas de B que conducen a la matriz $\left[\frac{I_m}{A^{-1}}\right]$.

12. Calcular las inversas de las matrices racionales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

13. Discutir en función de los parámetros a y b si las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a & 1 \\ 3a & -1 & a+2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a & 2b & a+b \\ 4a & 5b & 2a+2b \\ 7a & 8b & 2a+2b \end{bmatrix}$$

son regulares. En caso afirmativo, obtener su inversa.

14. (a) Sean i, j, k, l distintos 2 a 2. Probar que

$$\begin{cases} P_{jl}P_{ik}(t) = P_{ik}(t)P_{jl} \\ P_{li}P_{ik}(t) = P_{lk}(t)P_{li} \end{cases}$$

(b) Si $n \geq j > i > s$,

$$P_{ji}\left(\prod_{k=n}^{s+1} P_{ks}(t_k)\right) = \left(P_{ns}(t_n) \cdots P_{js}(t_i) \cdots P_{is}(t_j) \cdots P_{s+1s}(t_{s+1})\right) P_{ji}$$

15. (a) Probar que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ no posee factorización LU.
    (b) Probar que si una matriz regular posee una factorización "LU", ésta es única.
    (c) Probar que para cada matriz A existe una matriz P permutación tal que PA posee factorización LU.

16. Aplíquese el procedimiento **LU** a las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

17. Describir un algoritmo para calcular una matriz reducida por filas.