

Introducción

La solución a algunos problemas en ciencias, experimentales o no, involucra el cálculo de potencias elevadas de matrices; no parece aconsejable efectuar tales potencias de un modo directo. Por ejemplo, dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

el cálculo directo de A^{365} puede desanimar a cualquiera. Sin embargo, dicho cálculo viene exigido por el siguiente problema¹ de tipo demográfico:

Un enjambre contiene 5000 hormigas hembras de 1 día de vida, 4000 de 2 días, 3000 de 3 días, 2000 de 4 días y 1000 de 5 días de vida. Para reproducirse las hembras deben tener 5 días de vida, procreando 120 hembras y muriendo a continuación. Sin embargo, la mitad de las hembras mueren al primer día de vida; de las hembras de 2 días, sólo 1/3 alcanzan 3 días de vida; de éstas, 3/4 mueren durante el tercer día; finalmente, sólo 1/5 de las hembras de 4 días alcanzan los 5 días de vida. Calcular la población de hormigas hembras al cabo de un año.

Designando por n_i^j la cantidad de hormigas hembras de i días de edad al cabo de j días, se tiene:

$$\begin{pmatrix} n_1^{j+1} \\ n_2^{j+1} \\ n_3^{j+1} \\ n_4^{j+1} \\ n_5^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^j \\ n_2^j \\ n_3^j \\ n_4^j \\ n_5^j \end{pmatrix}$$

Por tanto, al cabo de un año,

$$\begin{pmatrix} n_1^{365} \\ n_2^{365} \\ n_3^{365} \\ n_4^{365} \\ n_5^{365} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}^{365} \begin{pmatrix} 5000 \\ 4000 \\ 3000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Cómo calcular esta potencia?

Veremos que A es semejante a una matriz cuya quinta potencia es la identidad y que la semejanza conserva esta igualdad. Por tanto, al cabo de un año la población de hormigas se conserva.

¹inspirado en los trabajos de Bernadelli. Ver bibliografía