El proceso de Grham-Schmidt. Factorización QR

El cálculo de una proyección ortogonal sobre un subespacio S aconseja el cálculo de una base ortonormal en S.

Los resultados de esta sección exponen un método, especialmente dirigido a los lectores que gusten del *lápiz y papel*, para obtener una base ortonormal. Nótese que es suficiente obtener una base ortogonal y luego normalizar.

Desde el punto de vista computacional los resultados que se obtienen se conocen con el nombre de factorización QR de una matriz, factorización que permite calcular con sencillez la seudoinversa.

Tal factorización permite además obtener de inmediato el teorema de Schur sobre triangulación por semejanza de matrices.

Destaca el siguiente resultado:

Sea A una matriz real o compleja de columnas libres. Escalonando por columnas la matriz $\left(\dfrac{A^*A}{A}\right)$ se obtiene $\left(\dfrac{D}{B}\right)$ donde $D = (d_{ij})$ con $d_{jj} > 0, \forall j$ y las columnas de B forman una familia ortogonal en K^n. Más aún $(B^j)^*B^j = d_{jj}$, y las columnas de $Q = B\prod_{j=1}^{n} Q_j(1/\sqrt{d_{jj}})$ forman una familia ortonormal.