GEOMETRIA I **PRIMER CUATRIMESTRE** **Soluciones**

1. (a) Describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento para obtener el rango de una matriz.

   Véase por ejemplo la página 17 del libro, teniendo en cuenta que el rango es el rango de las filas.

   (b) Afirma razonadamente o niega con un contraejemplo los siguientes enunciados:

   i. Las matrices elementales son regulares.
   ii. La multiplicidad algebraica de un valor propio coincide con la geométrica.
   iii. Si A y B son cuadradas y sumables,

   $$\mathrm{rang}(A+B) = \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B)$$

   i. Es cierto y se deduce directamente de

   $$P_{ij}P_{ij} = I_n \quad P_{ij}(t)P_{ij}(-t) = I_n \quad Q_i(s)Q_i(s^{-1}) = I_n$$

   ii. Es falso, por que 1 es valor propio doble de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pero su multiplicidad geométrica es

   $$\dim V(1) = 2 - \mathrm{rang}(I - J) = 2 - 1 = 1$$

   Recuerde el estudiante que J no es diagonalizable sobre ningún cuerpo (ver libro, p. 69).

   iii. Es también falso. Basta tomar $A = I_2$, $B = -I_2$; entonces $A+B = (0)$ y $\mathrm{rang}(A+B) = 0$, pero $\mathrm{rang}(A) = 2 = \mathrm{rang}(B)$ y así su suma es 4.

   (c) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que en un espacio vectorial de dimensión n una familia libre sea base. Una familia libre es base si tiene n vectores. Ver libro p. 46, corolario 9.10 iii) y/o p. 145 corolario 4.18 i) y ii).

   (d) Define el el concepto de subespacio vectorial. Ver libro p. 133, definición 2.5.

2. En Álgebra Lineal es clásica la afirmación “vectores propios asociados a valores propios distintos son libres”. Enuncia y demuestra un teorema que precise tal afirmación.

   Se trata de la proposición 2.12, p. 72 del libro.

3. Dada la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y h el endomorfismo de un espacio vectorial V dado por

$$(hv_1, hv_2, hv_3) = (v_1, v_2, v_3)A$$

se pide:

(a) Forma racional F de A y matriz P regular tal que $P^{-1}AP = F$.
Aplicando el procedimiento racional a A:

$$\left[\begin{array}{rrr} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{P_{13}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\sim}{P_{13}(2)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{P_{13}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\sim}{P_{13}} \left[\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\sim}{P_{23}} \left[\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{P_{23}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\sim}{P_{12}(-1)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{P_{12}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\sim}{Q_2(1/2)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{Q_2(2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\sim}{P_{23}(-1)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 2 & 2 \\ \hline -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{P_{23}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\sim}{Q_3(1/2)} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{Q_3(2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ \hline -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Es decir,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Base de V en la que la m.c. de h es F. Puesto que A es m.c. de h, de acuerdo con los cálculos realizados,

$$(v_1, v_2, v_3)P = (-2v_1 + v_3, -2v_1 + 2v_3, -4v_1 + 2v_2 + 4v_3)$$

(c) Forma irreducible G de A y matriz S regular tal que $S^{-1}AS = G$.
El polinomio mínimo de F es $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$
Los pilares asociados a los factores $(x-1)^2$ y $x-2$ son respectivamente:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, tomando

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ se tiene } G = Q^{-1}FQ = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz S pedida es

$$S = PQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Base de V en la que la m.c. de h es G. Puesto que A es m.c. de h, de acuerdo con los cálculos realizados,

$$(v_1, v_2, v_3)S = (2v_1, 2v_2, -2v_1 + 2v_2 + v_3)$$

(e) Forma de Jordan, si existe, J de A y matriz T regular tal que $T^{-1}AT = J$.
$\det(xI - F) = (x-1)^2(x-2)$ luego existe forma de Jordan, que es

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Los pilares asociados a los valores propios 1 y 2 son respectivamente:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, tomando

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ se tiene } Q^{-1}FQ = J$$

Luego la matriz T pedida es

$$T = PQ = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) Base de V en la que la m.c. de h es, si existe, J. Puesto que A es m.c. de h, de acuerdo con los cálculos realizados,

$$(v_1, v_2, v_3)T = (2v_1, -2v_1 + 2v_2, -2v_1 + 2v_2 + v_3)$$

(g) ¿A es diagonalizable? En caso afirmativo, describe una matriz U regular tal que $U^{-1}AU$ sea diagonal.

No, porque el polinomio mínimo de A no es producto de factores lineales distintos.

(h) ¿h es diagonalizable? En caso afirmativo, describe una base de V de vectores propios.

No, porque su m.c. A no lo es.

4. Sea $f\colon V \longrightarrow W$ la aplicación lineal de matriz coordenada[1]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en ciertas bases (v_i) y (w_j). Se pide:

(a) Dimensiones de V y W.

Puesto que A tiene 4 filas y 3 columnas,

$$\dim V = 3 \quad \dim W = 4$$

(b) Bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

$\mathcal{N}(A) = K < (1, 1, -1)$, luego una base de $\ker f$ es $(v_1 + v_2 - v_3)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= K < fv_1, fv_2, fv_3 >= \\ &= K < w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4, w_1 + w_2 + 2w_3, 2w_1 + 3w_2 + 4w_3 + w_4 > \end{aligned}$$

cuya base es $(w_1 + 2w_2 + 2w_3 + w_4, w_1 + w_2 + 2w_3)$, ya que el tercer vector es la suma de os dos primeros y éstos son libres.

[1]por columnas

(c) ¿f es monomorfismo? (razona tu contestación). No, el núcleo tiene dimensión 1.

(d) ¿f es epimorfismo? (razona tu contestación). No, la dimensión de la imagen es $2 < 4 = \dim W$

(e) Matrices P y Q regulares tales que $PAQ = [I_r, 0]$

Aplicando el procedimiento de la p. 24 del libro se obtienen, por ejemplo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) Bases de V y W para las que la m.c. de f es $[I_r, 0]$.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego[2],

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)P^{-1} = (w_1{+}2w_2{+}2w_3{+}w_4, -w_2{-}w_4, w_3, w_4)$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (v_1, v_2, v_3)Q = (v_1, -v_1 + v_2, -v_1 - v_2 + v_3)$$

(g) Conjunto antiimagen de $w_1 + w_2 + 2w_3$.

Puesto que la ecuación de f es $Y = AX$, se trata del conjunto de vectores cuyas coordenadas satisfacen

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema es

$$\mathcal{S} = (0, 1, 0) + K < (1, 1, -1) >$$

Por tanto[3],

$$f^{-1}(w_1{+}w_2{+}2w_3) = \{av_1{+}bv_2{+}cv_3 \mid (a, b, c) \in \mathcal{S}\} = \{tv_1{+}(1{+}t)v_2{-}tv_3 \mid t \in K\}$$

[2]Para obtener la puntuación máxima basta indicar

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)P^{-1}, (a_1, a_2, a_3) = (v_1, v_2, v_3)Q$$

[3]Para obtener la puntuación máxima no es necsario continuar