

1. Responde a las siguientes cuestiones:

- (a) ¿Es posible encontrar matrices no nulas de producto la matriz cero? En caso afirmativo, pon un ejemplo (2 puntos).
- (b) ¿Es posible encontrar matrices A, B tales que $AB = I_n$, pero $BA \neq I_n$? En caso afirmativo, pon un ejemplo, y en caso negativo razona tu contestación (2 puntos).
- (c) Define el concepto de nulidad o subespacio nulo de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos).
- (d) Define el concepto de forma irreducible de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos).
- (e) Define los conceptos de familia libre y ligada de vectores. Pon un ejemplo de cada (2 puntos).

2. Enuncia y demuestra un teorema que describa geoméricamente las simetrías en un espacio afín (10 puntos)

3. Discutir en función de los valores de los parámetros a, b si la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En los casos afirmativos, encontrar una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (10 puntos).

Solución: Puesto que A es suma diagonal de (a) y $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ es suficiente analizar esta última matriz. Su polinomio característico es $(x - b)(x + b)$. Los casos posibles son:

Primer caso: $b = -b$. Entonces, $b = 0$, B es la matriz cero, que es diagonal y puede tomarse $P = I_3$.

Segundo caso: $b \neq -b$; entonces, b y $-b$ son valores propios simples. Ahora,

$$V(b) = K < (1, 1) > \quad V(-b) = K < (1, -1) >$$

Por tanto, A es diagonalizable y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. En el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^3$ y respecto del sistema de referencia canónico $(O; e_1, e_2, e_3)$ se considera la cuádrica de ecuación

$$x^2 - 2y^2 - 2x + 4y + 2z = 0$$

Se pide:

- (a) Ecuación canónica métrica. (2 puntos)
- (b) Sistema de referencia asociado a la ecuación canónica métrica (2 puntos)
- (c) Ecuaciones implícitas en $(O; e_1, e_2, e_3)$ de sus variedades de simetría (2 puntos)
- (d) Ecuación canónica afín (2 puntos)
- (e) Sistema de referencia asociado a la ecuación afín (2 puntos)

Solución:

- (a) La matriz asociada a la cuádrica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de rango 4 y

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene valores propios no nulos 1, -2. Por tanto, $d = 2$. Buscamos el coeficiente de $x^{n-r-1} = x^0$ en el polinomio característico de A , es decir, $\det(A)$, que es 2. Así, la ecuación canónica métrica es

$$x^2 - 2y^2 = 2\sqrt{\frac{-2}{-2}}z = 2z$$

- (b) Puesto que A_{00} es diagonal, $P = I_4$ y $B = A$. Ahora, haciendo el cambio ¹

$$x = 1 + x' \quad y = 1 + y' \quad z = z'$$

la ecuación queda

$$x^2 - 2y^2 + 2z = -1$$

Ahora, haciendo el cambio²

$$x = x' \quad y = y' \quad z = -1/2 + z'$$

la ecuación queda

$$x^2 - 2y^2 = -2z$$

¹es decir, tomamos como nuevo origen el punto de coordenadas $(1, 1, 0)$

²es decir, tomamos como nuevo origen el punto de coordenadas $(1, 1, -1/2)$

Finalmente³ haciendo el cambio

$$x = x' \quad y = y' \quad z = -z'$$

la ecuación canónica métrica es

$$x^2 - 2y^2 = 2z$$

En definitiva, el nuevo sistema de referencia es

$$(N, e_1, e_2, -e_3)$$

donde N es el punto de coordenadas $(1, 1, -1/2)$.

(c) Las variedades de simetría son:

La recta

$$N + \mathbf{R} \langle -e_3 \rangle = N + \mathbf{R} \langle e_3 \rangle: \quad x = 1, y = 1$$

y los planos

$$N + \mathbf{R} \langle e_1, -e_3 \rangle = N + \mathbf{R} \langle e_1, e_3 \rangle: \quad y = 1$$

$$N + \mathbf{R} \langle e_2, -e_3 \rangle = N + \mathbf{R} \langle e_2, e_3 \rangle: \quad x = 1$$

(d) Finalmente, la ecuación reducida se obtiene de la métrica mediante el cambio

$$x = x' \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} y' \quad z = z'$$

que da

$$x^2 - y^2 = 2z$$

(e) El nuevo sistema es

$$(N, e_1, \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, -e_3)$$

³ $b_3 = -1, p = 1, M = (-1)$