GEOMETRIA I **2^0 Examen Cuatrimestral** **6–Junio–00**

1. Responde a las siguientes cuestiones:
   - Define el concepto de espacio vectorial unitario. Pon un ejemplo (1 punto).
   - La factorización de Cholesky de una matriz A es una descomposición del tipo $A = PQR$; ¿cómo son las matrices P, Q y R? (1 punto).
   - Define el concepto de matriz normal real (1 punto).
   - Sea g una aplicación de un espacio afín en sí tal que $g^2 = id$. ¿Es cierto que g es una simetría? Razona tu contestación (2 puntos).
   - Enuncia el teorema espectral real. Pon un ejemplo 2×2 (2 puntos).
   - Describe el proceso de Gram-Schmidt. Pon un ejemplo en $\mathbf{R}^3$. (3 puntos).
2. Enuncia y demuestra un teorema que relaciones las variedades afines y los baricentros. (10 puntos).
3. (a) Probar que la afinidad inversa de una homotecia de razón $k \neq 0$ es la homotecia del mismo centro y razón k^{-1} (2 puntos).

   Solución: La composición es una afinidad g con un punto fijo, el centro O de ambas, y de aplicación lineal asociada $fv = kk^{-1}v = v$, luego es una homotecia de razón 1, que es la identidad.

   (b) Probar que el centro de una homotecia no idéntica pertenece a la recta formada por dos puntos homólogos distintos (2 puntos).

   Solución: Sea $P \neq h(P)$. Así, $P \neq O$ y

   $$P, h(P) \in \overline{OP} \Longrightarrow O \in \overline{OP} = \overline{h(P)P}$$

   (c) Sean h_1, h_2 homotecias de centros O_1, O_2 y razones k_1, k_2 ambas no nulas. Probar:

   - $k_1k_2 = 1 \Longrightarrow h_2 \circ h_1$ es una traslación de vector $(1 - k_2)\ \overrightarrow{O_1O_2}$.
   - $k_1k_2 \neq 1 \Longrightarrow h_2 \circ h_1$ es una homotecia de razón k_1k_2.

   (2 puntos)

   Solución: La aplicación lineal asociada a $h_2 \circ h_1$ es $f(v) = k_2k_1v$.

   - Si $k_1k_2 = 1$, queda $fv = v$, luego es traslación. Ahora,

   $$\begin{aligned}(h_2 \circ h_1)(O_1) &= h_2(O_1) = O_2 + k_2\ \overrightarrow{O_2O_1} \\ &= O_1 + \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\ \overrightarrow{O_2O_1} \\ &= O_1 + (1 - k_2)\ \overrightarrow{O_1O_2}\end{aligned}$$

   - En el caso $k_1k_2 \neq 1$, 1 no es valor propio de f, luego existe un único punto doble y se trata de una homotecia.

   (d) Sea t una traslación de vector v y h una homotecia de centro O y razón k no nula. Probar:

- Si $k = 1$, entonces $t \circ h = h \circ t = t$.
- En caso contrario,
  i. $t \circ h$ es una homotecia de razón k y centro $O + 1/(1-k)v$.
  ii. $h \circ t$ es una homotecia de razón k y centro $O + k/(1-k)v$.

Solución: La aplicación lineal asociada es $f(v) = kv$.

- Si $k = 1$, entonces $h = id$ y $t \circ h = h \circ t = t$.
- En caso contrario, 1 no es valor propio de f, luego existe un único punto doble y se trata de una homotecia de razón k.
  i. Basta ver que $O + 1/(1-k)v$ es doble. Al efecto,
  $$(t \circ h)(O + 1/(1-k)v) = \cdots = O + k/(1-k)v + v = O + 1/(1-k)v$$
  ii. Análogamente,
  $$(h \circ t)(O + k/(1-k)v) = h(O + k/(1-k)v + v) = \cdots = O + k/(1-k)v$$

(e) Sea t una traslación de vector u y h una homotecia de razón $k \neq 0$. Probar que $h^{-1}th$ es una traslación de vector $k^{-1}u$ (1 punto).
Solución: Sea τ la traslación de vector $k^{-1}u$
$$h^{-1}th(P) = \tau(P) \iff th(P) = h(P + k^{-1}u) \iff h(P) + u = h(P) + u$$

4. En el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^4$ y respecto del sistema de referencia canónico $(O; e_1, e_2, e_3, e_4)$ se considera la cuádrica de ecuación
$$3\,x^2 + 3\,y^2 + 3\,z^2 + 3\,t^2 + 2\,xy + 2\,zt + 4\,t = 1$$
Se pide:
(a) Ecuación canónica métrica (2 puntos)
(b) Sistema de referencia asociado a la ecuación canónica métrica (2 puntos)
(c) Ecuaciones implícitas, en el sistema de referencia calculado en (b), de sus variedades de simetría (2 puntos)
(d) Ecuacion canónica afín (2 puntos)
(e) Sistema de referencia asociado a la ecuación afín (2 puntos)

Solución:

(a) La matriz asociada a la cuádrica es
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de rango 5. Ahora

$$A_{00} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

que tiene rango $r = 4$, luego la diferencia de rangos es $1 < 2$ y necesitamos calcular el coeficiente de x^0 en el polinomio característico de A. Se obtiene 160 y $t = -160$.

Ahora los valores propios de A_{00} son $(4, 4, 2, 2)$ luego la ecuación canónica métrica es

$$4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2t^2 = \frac{160}{64} = \frac{5}{2}$$

(b) Puesto que la cuádrica posee centro éste es el nuevo origen de coordenadas. Resolviendo el sistema $A_{00}X = -(0, 0, 0, 2)^t$ se obtiene como coordenadas del centro $(0, 0, 1/4, -3/4)$.

El procedimiento espectral da

$$P_{00} = \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2\sqrt{2} & 0 & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1/2\sqrt{2} & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

y los nuevos vectores básicos tienen sus coordenadas e las columnas de P_{00}.

(c) Los ejes pasan por el origen nuevo y tienen como vector director cualquiera proporcional a los de la nueva base. Por tanto su ecuación se deduce de

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & y & z-1/4 & t+3/4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & y & z-1/4 & t+3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & y & z-1/4 & t+3/4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & y & z-1/4 & t+3/4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

(d) La ecuacion canónica afín se obtiene de la métrica directamente. Dividiendo por $5/2$ da

$$8/5x^2 + 8/5y^2 + 4/5z^2 + 4/5t^2 = 1$$

y la ecuación reducida es

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

(e) El cambio necesario es

$$\begin{cases} x = \sqrt{5/8}x' \\ y = \sqrt{5/8}y' \\ z = \sqrt{5/4}z' \\ t = \sqrt{5/4}t' \end{cases}$$