GEOMETRIA I **23–Junio–00**

1. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) Indica un criterio numérico para que dos matrices $m \times n$ sean equivalentes. Pon un ejemplo (1 punto).

   Solución: Que posean el mismo rango. Por ejemplo (2) y (3).

   (b) Es conocido que una matriz regular es producto de matrices elementales tipo 1, 2 y 3. ¿Es cierto que una matriz regular es producto de matrices elementales tipo 2 y 3? Razona tu contestación (1 punto).

   Solución: Sí, pues toda matriz elemental tipo 1 es producto de matrices elementales tipo 2 y 3.

   (c) Describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento para resolver un sistema $AX = B$ de m ecuaciones con n incógnitas (3 puntos).

   Solución: Uno de ellos aparece en el libro de teoría (p. 58).

   (d) Define el concepto de valor propio de una matriz sobre K . Pon un ejemplo (1 punto).

   Solución: Un elemento de K que es raíz de su polinomio característico. Si $A = (3)$, 3 es valor propio.

   (e) Haz una comparación aritmética entre dos bases de espacios vectoriales isomorfos. Pon un ejemplo (1 punto).

   Solución: Tienen la misma cantidad de vectores. Por ejemplo $((1,0),(0,1))$ y $(1,x)$ son bases de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}_1[x]$.

   (f) Define el concepto de matriz coordenada de una aplicación lineal. Pon un ejemplo (2 puntos).

   Solución: La definición puede verse en el libro de teoría (p. 151). Por ejemplo, la matriz (0) es matriz coordenada del endomorfismo $hv = 0_W \forall v \in V$, en cualquier par de bases.

   (g) Define el concepto de forma racional de un endomorfismo. Pon un ejemplo (1 punto).

   Solución: La forma racional de cualquiera de sus matrices coordenadas. Por ejemplo, la matriz identidad es forma racional del endomorfismo $hv = v$.

2. Enuncia y demuestra un teorema que describa un procedimiento para calcular la nulidad o subespacio nulo de una matriz (10 puntos).

   Solución: Aparece en el libro de teoría (p. 50).

3. Calcula la factorización "LU" de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(10 puntos)}$$

Solución:

$$P_{23}P_{12}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = B$$

$$P_{21}(2)B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U$$

Por tanto, $P_{21}(2)P_{23}P_{12}A = U$. Tómese $P = P_{23}P_{12}, L = P_{21}(-2)$.

4. Se considera el endomorfismo h de $\mathbf{R}^3$ dado por $he_j = (j-1)e_1 + j\,e_2 + (j+1)e_3$. Se pide:

   (a) Matriz coordenada A de h en la base canónica.

   (b) Bases de $\ker h$ y $h(V)$.

   (c) Matriz coordenada B de h en la base $(e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+e_3)$

   (d) Matriz P regular tal que $P^{-1}AP = B$

Solución:

(a)

$$he_1 = e_2 + 2e_3 \quad he_2 = e_1 + 2\,e_2 + 3e_3 \quad he_3 = 2e_1 + 3\,e_2 + 4e_3$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) La base del núcleo coincide con la base de la nulidad de A que es $(1, -2, 1)$. Una base de $h(V)$ estaráá formada por $3 - 1 = 2$ columnas libres de A. Por ejemplo, $((0, 1, 2), (1, 2, 3))$.

(c) Se trata de calcular las coordenadas de $h(e_1+e_2)$, $h(e_1-e_2)$ y $h(e_1+e_3)$ en esa base $(e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+e_3)$. Planteamos

$$h(e_1+e_2) = a(e_1+e_2) + b(e_1-e_2) + c(e_1+e_3)$$

$$h(e_1-e_2) = m(e_1+e_2) + n(e_1-e_2) + p(e_1+e_3)$$

$$h(e_1+e_2) = q(e_1+e_2) + r(e_1-e_2) + s(e_1+e_3)$$

Sustituyendo, operando e identificando coordenadas, en base canónica, se obtienen tres sistemas de Cramer de orden 3.

Resolviendo dichos sistemas

$$a = -1/2 \quad b = -7/2 \quad c = 5$$

$$m = -1/2 \quad n = 1/2 \quad p = -1$$

$$q = 0 \quad r = -4 \quad s = 6$$

(d) La matriz P tiene en sus columnas las coordenadas de

$$(e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 + e_3) \quad \text{en} \quad (e_1, e_2, e_3)$$

Es decir,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Enuncia y demuestra la ley de inercia de Sylvester (10 puntos).

   Solución: aparece en el libro de teoría (p. 180).

6. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) Define el concepto de homotecia. Pon un ejemplo (2 puntos).
   Solución: Se dice homotecia de centro O y razón k a la aplicación dada por

   $$h(P) = O + k \ \overrightarrow{OP}$$

   Por ejemplo, la aplicación h de $\mathbf{R}^2$ en sí dada por $h(x, y) = (2x, 2y)$ es una homotecia de centro $(0, 0)$ y razón 2.

   (b) Define el concepto de forma hermitiana. Pon un ejemplo 2×2 (2 puntos).
   Solución: Aparece en el libro de teoría (p. 181). Por ejemplo

   $$\mathcal{H}\colon \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2 \quad \text{dada por} \quad \mathcal{H}(x, y), (z, t) = \hat{x}z + \hat{y}t$$

   (c) Enuncia un teorema que relacione las coordenadas de un punto y las de su imagen por una afinidad (2 puntos).

   Solución: Sea g una afinidad de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$ y f su aplicación lineal asociada. Sean $(O; u_1, \ldots, u_n)$ y $(N; v_1, \ldots, v_m)$ sistemas de referencia respectivos en $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$. Sean $a = (a_1, \ldots, a_n)^t$ las coordenadas de $g(O)$, y sea A la m.c. de f en las bases $(u_i), (v_j)$. Entonces, si el punto P tiene coordenadas $(p_1, \ldots, p_n)$ las coordenadas $(q_1, \ldots, q_m)$ de $g(P)$ satisfacen

   $$(q_1, \ldots, q_m)^t = a + A(p_1, \ldots, p_n)^t$$

   (d) Enuncia un resultado que describa la aplicación lineal adjunta de una dada entre espacios vectoriales unitarios V y W. No olvides describir su propiedad esencial en relación a los productos hermitianos de V y W (2 puntos).

   Solución: Se encuentra en el libro de teoría (p. 216).

   (e) Define el concepto de centro de una cuádrica. Pon un ejemplo (2 puntos).

   Solución: Se encuentra en el libro de teoría (p. 252). Por ejemplo, el punto $(0, 0)$ es el centro de la cónica $x^2 + y^2 = 1$.

7. Calcula la cúbica[1] que pase más cerca de los puntos

$$(-1,-1),(1,1),(1,-1),(-1,0)$$

Solución: Aplicando el método de los mínimos cuadrados se trata de encontrar la seudosolución del sistema $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base de la nulidad de la matriz de coeficientes está formada por las columnas de

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se trata de resolver el sistema

$$\left(\frac{A^tA}{N^t}\right) X = \left(\frac{B}{0}\right) X$$

que da $(-1/8, 1/8, -1/8, 1/8)$ y la cúbica pedida es

$$-1/8 + 1/8\,x - 1/8\,x^2 + 1/8\,x^3$$

8. En el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^3$ y respecto del sistema de referencia canónico $(O; e_1, e_2, e_3)$ se considera la aplicación $g = \tau \circ \sigma$ donde σ es la simetría ortogonal de base la variedad de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array} \right.$$

y τ es la traslación de vector $e_2 - e_3$. Se pide:

   (a) Ecuación de g en el sistema de referencia dado (3 puntos).

   (b) Probar que g es un movimiento (1 punto).

   (c) Distancia del punto P de coordenadas $(3, 1, -1)$ a la imagen, por g, de la variedad de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = -1 \end{array} \right. \quad (1\,\text{punto})$$

[1] curva de ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(d) Ecuación canónica de g y sistema de referencia asociado (2+3 puntos).

Solución:

(a) La dirección de la base de la simetría es $\mathbf{R} < e_2 - e_3 >$.
Por tanto, la dirección de la simetría ortogonal es su complemento ortogonal :$\mathbf{R} < e_1, e_2 + e_3 >$. Para hallar el simétrico del origen O cortamos la base

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

con el plano $O + \mathbf{R} < e_1, e_2 + e_3 >$ de ecuación $y - z = 0$, obteniendo el punto $(1, 0, 0)$. Así, el simétrico del origen es el punto $(2, 0, 0)$. Ahora el trasladado de este punto es $(2, 1, -1)$. Por tanto, $g(O)$ es el punto $(2, 1, -1)$. La aplicación lineal asociada debe ser la de la simetría y ésta deja fijo $e_2 - e_3$ y transforma e_1 y $e_2 + e_3$ en sus opuestos. Así la matriz coordenada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En definitiva, la ecuación queda $Y = a + AX$ donde

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Basta ver, por ejemplo, que $A^2 = I_3$

(c) La variedad dada es la recta que pasa por $(-1, 0, 0)$ y de vector director $e_2 - e_3$. Por tanto, su homóloga pasa por $(3, 1, -1)$, que es el punto que nos han dado. Directamente, la distancia es cero.

(d) Puesto que A es simétrica la forma normal de la isometría es la diagonal de los valores propios $B = \operatorname{diag}[1, 1, -1]$, siendo la matriz del cambio

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ahora $P^t a = (2, -\sqrt{2}, 0)^t$. Puesto que 1 es valor propio doble $p = \sqrt{6}$ y la ecuación canónica es

$$Y = (\sqrt{6}, 0, 0)^t + \operatorname{diag}[1, 1, -1]$$

Para ello necesitaremos hacer el cambio de base

$$(w_1, w_2, w_3) = (v_1, v_2, v_3)\operatorname{diag}[Q, 1]$$

donde los v_i son los vectores de coordenadas las columnas de P y Q es una matriz ortogonal cuya primera columna es $1/\sqrt{6}(2, -\sqrt{2})^t$. Tómese, por ejemplo

$$Q = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Observación: Los alumnos que se presenten a los dos cuatrimestres harán las preguntas 1,3,5 y 8.