GEOMETRIA I **22–Junio–99**

1. Responde a las siguientes cuestiones:
   (a) Define elconcepto de rango de una familia de vectores (2 puntos).
   (b) Relaciona los términos de las matrices A y AP cuando P es una matriz elemental (2 puntos).
   (c) Prueba que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio mínimo. ¿Es cierto el recíproco? Razona tu respuesta (2 puntos).
   (d) Define el concepto de bloque de Jordan asociado a un valor propio. Pon un ejemplo (2 puntos).
   (e) Define el concepto de aplicación lineal. Pon un ejemplo (2 puntos).
2. Enuncia y demuestra el teorema de Rouché-Frobenius (10 puntos).
3. Discutir en función de los valores de a, b y c si la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$
   es diagonalizable sobre $\mathbf{R}$.
   En los casos afirmativos encontrar P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (10 puntos).
4. Sea T la aplicación de $M_2(\mathbf{Q})$ en $\mathbf{Q}$ dado por $h((a_{ij})) = a_{11} + a_{22}$. Se pide:
   (a) Probar que T es lineal (1 punto).
   (b) Bases del núcleo e imagen (2 puntos).
   (c) Matriz coordenada A de T en las bases canónicas de $M_2(\mathbf{Q})$ y $\mathbf{Q}$ (1 punto).
   (d) Probar que
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$
   es una base de $M_2(\mathbf{Q})$ (2 puntos).
   (e) Matriz coordenada B de T en las bases
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{y} \quad (-1)$$
   (3 puntos).
   (f) Matrices P y Q regulares tales que $PAQ = B$ (1 puntos).
5. Enuncia y demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwartz. (10 puntos).

6. Responde a las siguientes cuestiones:
   (a) Define el concepto de forma hermitiana sobre un espacio vectorial (2 puntos).
   (b) Define el concepto de matriz ortogonal. Pon un ejemplo (2 puntos).
   (c) Enuncia un teorema que relacione los conceptos de variedad afín y baricentro (2 puntos).
   (d) Define el concepto de cuádrica regular. Pon un ejemplo (2 puntos).
   (e) Define el concepto de homotecia. Pon un ejemplo (2 puntos).

7. Dada la matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 2\,i \\ 0 & -2\,i & 5 \end{bmatrix}$$
   se pide:
   (a) Rango y signatura (5 puntos).
   (b) Matriz G triangular inferior de términos diagonales positivos tal que
$$A = GG^* \quad \text{(5 puntos)}$$

8. En el espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^4$ y respecto del sistema de referencia canónico $(O; e_1, e_2, e_3, e_4)$ se considera la cuádrica de ecuación
$$x^2 - 2y^2 + 2zt - 2x + 4y = 0$$
   Se pide:
   (a) Ecuación canónica métrica. (2 puntos)
   (b) Sistema de referencia asociado a la ecuación canónica métrica (2 puntos)
   (c) Ecuaciones implícitas en $(O; e_1, e_2, e_3, e_4)$ de sus variedades de simetría (2 puntos)
   (d) Ecuacion canónica afín (2 puntos)
   (e) Sistema de referencia asociado a la ecuación afín (2 puntos)

Observación: Los alumnos que se presenten a los dos cuatrimestres harán las preguntas 2,4,6 y 8.