GEOMETRIA I TEORIA 9–Febrero–98

1. Responde a las siguientes cuestiones:

   - Enuncia una condición necesaria y suficiente para que una matriz (sobre K) sea diagonalizable (sobre K) (2 puntos).
   - Define los conceptos de matriz triangular superior, inferior y diagonal. Pon un ejemplo de cada una de ellas (3 puntos).
   - Describe la inversa de una matriz elemental tipo 2 (1 punto).
   - Define el concepto de nulidad de una matriz (1 punto).
   - Define el concepto de monomorfismo y describe una caracterización del mismo (2 puntos).
   - Define el concepto de forma canónica de Jordan de un endomorfismo h (1 punto).

2. (a) Sea $f: V \longrightarrow W$ una aplicación lineal dada por $(fv_i) = A(w_j)$. Deduce una relación entre las coordenadas $(t_1, \ldots, t_m)$ de un vector cualquioera v y las cordenadas $(s_1, \ldots, s_n)$ de su imagen $f(v)$ (5 puntos).

   (b) Sea A matriz coordenada de un endomorfismo h de V respecto de cierta base. Deduce el conjunto de matrices coordenadas de h al cambiar de bases en V (5 puntos).

GEOMETRIA I PROBLEMAS 9–Febrero–98

OPCION A: Sea K el cuerpo de los números racionales.

1. Discutir y resolver, en los casos posibles con rango inferior a 4, el siguiente sistema matricial en función de los valores de a y b:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & a & b \\ 3\,b & 2 & a & 2\,b \\ b & 1 & 2\,a & 2\,b \\ 2\,b & 1 & 0 & 2\,b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a+b+1 & a \\ 3\,a+2\,b+1 & b \\ 2\,b+1 & 1 \\ a+2\,b & -a \end{pmatrix} \quad \text{(10 puntos)}$$

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide A^{125} (2 puntos).

3. Dada la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \quad b \neq 0$$

se pide, en función de los valores de a y b:

   (a) Calcular su forma canónica racional F (1 punto)
   (b) Calcular una matriz P regular tal que $P^{-1}AP = F$ (2 puntos)
   (c) Calcular su forma canónica de Jordan J (1 punto)
   (d) Calcular una matriz S regular tal que $S^{-1}AS = J$ (2 puntos)
   (e) ¿Es A diagonalizable sobre K? Razona la respuesta. (1 punto)
   (f) Calcular el determinante de A (1 punto).

OPCION B:

1. Se considera la matriz de orden n

$$A = \begin{bmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x^2+1 \end{bmatrix}$$

cuyos únicos términos no nulos son:

$$\begin{cases} a_{ii} = x^2+1, & i = 1, \dots, n \\ a_{ii+1} = x, & i = 1, \dots, n-1 \\ a_{ii-1} = x, & i = 2, \dots, n \end{cases}$$

Probar que su determinante es $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$ (10 puntos). (Indicación: Razonar por inducción sobre n).

2. En un espacio vectorial V sobre $\mathbf{Q}$ de base (v_1, v_2, v_3, v_4) se considera el endomorfismo h dado por $hv_1 = v_2, hv_2 = -2v_1+3v_2, hv_3 = v_4, hv_4 = 2v_4$ Se pide:

   (a) Calcular su polinomio mínimo (3 puntos)

   (b) Calcular su forma canónica racional F (1 punto)

   (c) Base de V en la que la matriz coordenada de h es F (2 puntos)

   (d) Calcular su forma canónica de Jordan J (1 punto)

   (e) Base de V en la que la matriz coordenada de h es J (2 puntos)

   (f) ¿Es diagonalizable h sobre el cuerpo de los números racionales? (1 punto)

SOLUCIONES

A.1.- **Solución**:

Discusión: Escalonamos por filas la matriz ampliada $(A|B)$,

$$(A|B) \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & a & b & a+b+1 & a \\ 0 & -1 & -2a & -b & -b-2 & -3a+b \\ 0 & 0 & a & b & -a+b & -a+1 \\ 0 & -1 & -2a & 0 & -a-2 & -3a \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & a & b & a+b+1 & a \\ 0 & -1 & -2a & -b & -b-2 & -3a+b \\ 0 & 0 & a & b & -a+b & -a+1 \\ 0 & 0 & 0 & b & -a+b & -b \end{array}\right] = (C|D)$$

Por lo que,

- $a \neq 0 \neq b \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 4 = \operatorname{rang}(A|B)$ S.C.D.
- $a = 0 = b \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 1$ y $\operatorname{rang}(A|B) > 1$ (observar la fila 3) S.I.
- $b = 0 \neq a \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 2$ y $\operatorname{rang}(A|B) > 2$ (observar la fila 4) S.I.
- $a = 0 \neq b \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$ y

$$(C|D) = \left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & 0 & b & b+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -b & -b-2 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b & -b \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & 0 & b & b+1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -b & -b-2 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b-1 \end{array}\right] = (E|F)$$

Luego $b \neq -1 \Longrightarrow \operatorname{rang}(A|B) = 4$ S.I.

Finalmente, $b = -1 \Longrightarrow \operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(A|B)$, S.C.I.

Solución particular: $(a = 0, b = -1)$

$$(E|F) = \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para el subsistema $(E|F^1)$ se obtiene a simple vista $S^1 = (1, 2, 0, 1)^t$ y para el $(E|F^2)$, $S^2 = (1, 0, 0, -1)^t$. Luego una solución particular es: $S = (S^1 S^2)$.

Base de la nulidad: La nulidad de E posee dimensión $= 4 - 3 = 1$. Por tanto, basta buscar un vector no nulo. A simple vista, $N = (0, 0, 0, 1, 0)^t$.

Solución general:

$$\{S + NT | T \in M_{1\times 2}(\mathbf{Q})\}$$

A.2.- **Solución**: Puesto que $|xI - A|$ posee grado 3 necesitamos calcular, a lo sumo, la potencia A^2.
Ahora bien,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Lo que resuelve directamente, $A^{125} = A^{124}A = (A^2)^{62}A = I_3 A = A$

A.3.- **Solución**:

1. Forma canónica racional F:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & 1 \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b^2 & b & b \\ 1 & a & 1 & 1 \\ b & b^2 & a & b \\ b & b^2 & b & a \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -a^2 + b^2 & -a + b & -a + b \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & b^2 - ab & a - b & 0 \\ 0 & b^2 - ab & 0 & a - b \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -2\,ab + 3b^2 - a^2 & -a + b & -a + b \\ 1 & 2\,a + 2\,b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -2\,ab + 3\,b^2 - a^2 & -a + b & -a + b \\ 1 & 2\,b + 2\,a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -2\,ab+3\,b^2-a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2\,b+2\,a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$x^2-(2b+2a)x+2\,ab-3\,b^2+a^2=(x-(a-b))(x-(a+3b)) \quad (1)$$

hemos obtenido la forma racional:

$$F=\begin{bmatrix} 0 & -2\,ab+3\,b^2-a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2\,b+2\,a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

2. Para obtener P hacemos en I_4 las mismas operaciones en las columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & -1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix} = P$$

3. Forma canónica de Jordan: De acuerdo con (1), la forma canónica de Jordan de la primera caja compañera de F es $diag[a+3b, a-b]$, luego

$$J=diag[a+3b, a-b, a-b, a-b]$$

4. La matriz de paso Q en la primera caja compañera está formada por los pilares $Q_1=\begin{bmatrix} b-a \\ 1 \end{bmatrix}$ $Q_2=\begin{bmatrix} -a-3b \\ 1 \end{bmatrix}$, luego $Q=(Q_1,Q_2)$; poniendo

$$R = \left[\begin{array}{cc|c|c} b-a & -a-3b & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right]$$

$R^{-1}FR = J$, y la matriz S pedida es: $S = PR$

5. A es diagonalizable pues J es diagonal.

6. $\det(A) = \det(J) = (a+3b)(a-b)^3$

B.1.- **Solución**: Denotemos Δ_n al determinante de orden n.
Entonces, $\Delta_1 = 1 + x^2$ y

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} = (x^2+1)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$$

Supongamos $n > 2$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \Delta_n & = & (x^2+1)\Delta_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ & \overset{n\geq 2}{=} & (x^2+1)\Delta_{n-1} - x(x\Delta_{n-2}) = (x^2+1)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2} \\ & = & (x^2+1)(1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-1)}) - x^2(1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-2)}) \\ & = & x^2(x^{2(n-1)}) + 1 + x^2 + \cdots + x^{2n-1} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} \end{array}$$

B.2.- **Solución**: La matriz coordenada de h en la base dada es

$$A = \left[\begin{array}{c|c} C(x^2-3x+2) & \\ \hline & C(x^2-2x) \end{array}\right]$$

1. El polinomio mínimo de h es el de A es decir, el

$$mcm(x^2-3x+2, x^2-2x) = x(x-1)(x-2)$$

2. Forma canónica racional:

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] = B$$

La forma canónica racional F es la submatriz de B formada por las 4 primeras filas. Sea P la formada por las 4 últimas filas.

3. Base de V en la que la matriz coordenada de h es F: $P^{-1}AP = F$, luego la nueva base es $(v_1, v_2, v_3, v_4)P = (v_1 + v_3, v_2 + v_4, -2v_1 + 3v_2 + 2v_4, v_4)$

4. Forma canónica de Jordan J: La forma de Jordan de la primera caja de A es $diag(1, 2)$ y la de la segunda caja es $diag(2, 0)$ por lo que $J = diag(1, 2, 2, 0)$

5. Base de V en la que la matriz coordenada de h es J:

   La matriz de paso Q_1 de la primera caja se obtiene con el 1-pilar del polinomio $(x-1)(x-2)$ asociado a $(x-1)$ y el 2-pilar de $(x-1)(x-2)$ asociado a $(x-2)$; es decir, $Q_1 = \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$

Y la matriz de paso Q_2 de la segunda caja se obtiene con el 2-pilar de $(x-2)x$ asociado a $(x-2)$ y el 0-pilar de $(x-2)x$ asociado a x; es decir, $Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Luego, poniendo $Q = diag[Q_1, Q_2]$

$(v_1, v_2, v_3, v_4)Q = (-2v_1 + v_2, -v_1 + v_2, v_4, -2v_3 + v_4)$

6. Sí, pues J es diagonal.