GEOMETRIA I **23–Junio–98**

1. Responde a las siguientes cuestiones:

   (a) Describe las operaciones elementales en una familia de vectores (2 puntos).

   (b) Enuncia condiciones necesarias y suficientes para que una función determinante sea multiplicativa (2 puntos).

   (c) Prueba que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico. ¿Es cierto el recíproco? Razona tu respuesta (2 puntos).

   (d) Define el concepto de matriz compañera de un polinomio. Pon un ejemplo (2 puntos).

   (e) Define el concepto de suma directa de subespacios. Pon un ejemplo de suma directa y uno de suma lineal no directa (2 puntos).

2. Enuncia y demuestra un teorema que relacione el rango (de filas) de una matriz con sus submatrices regulares (10 puntos).

3. Discutir en función de los valores de a y b si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{bmatrix}$$

   es diagonalizable sobre $\mathbf{R}$.

   En los casos afirmativos encontrar P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (10 puntos).

4. Sea h el endomorfismo de $\mathbf{Q}_2[x]$ dado por $h(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$. Se pide:

   (a) Bases del núcleo e imagen (2 puntos).

   (b) Matriz coordenada A de h en la base $(1, x, x^2)$ (2 puntos).

   (c) Matriz coordenada B de h en la base $(1, 1+x, 1+x+x^2)$ (4 puntos).

   (d) Matriz P regular tal que $P^{-1}AP = B$ (2 puntos).

5. Enuncia y demuestra la Ley de inercia de Sylvester. (10 puntos).

6. Responde a las siguientes cuestiones:

(a) Define el concepto de producto escalar sobre un espacio vectorial (2 puntos).

(b) Define el concepto de matriz unitaria. Pon un ejemplo (2 puntos).

(c) Enuncia un teorema que describa las ecuaciones normales de un sistema (2 puntos).

(d) Define el concepto de centro de de una cuádrica. Pon un ejemplo (2 puntos).

(e) Enuncia el teorema de Menelao (2 puntos).

7. Discutir en función de los valores de a si la matriz

$$\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

posee factorización de Cholesky. Encontrarla en los casos que sea posible (10 puntos).

8. En un espacio afín euclídeo E y respecto un sistema de referencia ortonormal $(O; u_1, u_2, u_3, u_4)$ se consideran la traslación τ de vector $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ y la simetría ortogonal σ de base el plano de ecuaciones

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Ecuación de $f = \tau\sigma$. (2 puntos)

(b) Probar que f es un movimiento. (2 puntos)

(c) Distancia del punto P de coordenadas $(2, 1, 2, 1)$ a la imagen de la variedad afín de ecuaciones

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{(2 puntos)}$$

(d) Ecuacion canónica de f (2 puntos)

(e) Sistema de referencia asociado a la ecuación canónica (2 puntos)

Observación: Los alumnos que se presenten a los dos cuatrimestres harán las preguntas 1,4,5 y 8.