GEOMETRIA I **Examen Extraordinario** **5–Setiembre–97**

1. Enuncia y demuestra un teorema que caracterice los isomorfismos mediante las imágenes de una base (5 puntos).

2. Responde a las siguientes cuestiones:

   - Define el concepto de rango de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos)
   - Indica una relación entre los determinantes de
     (a) una matriz regular y su inversa (1 punto)
     (b) dos matrices semejantes (1 punto).
   - Define el concepto de valor propio de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos).
   - Define el concepto de traslación. Pon un ejemplo (2 puntos).
   - Enuncia un teorema que describa geométricamente las simetrías[1] en un espacio afín (2 puntos).

3. Enuncia y demuestra la desigualdad triangular en un espacio vectorial unitario (5 puntos).

4. Sobre el cuerpo de los números racionales se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Se pide:

   - Forma racional F de A y matriz P tal que $P^{-1}AP = F$ (1+3 puntos)
   - Polinomio mínimo de A (1 punto).
   - Forma de Jordan J de Ay matriz Q tal que $Q^{-1}AQ = J$ (1+3 puntos).
   - ¿Es diagonalizable A por semejanza? (1 punto).

5. Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - y^2 - z^2 - 2\,y - 2\,z - 2\,yz = 1$$

   se pide:

[1] afinidades involutivas, es decir, $g^2 = id$.

- Ecuación canónica métrica (3 puntos).
- Sistema de referencia asociado (4 puntos).
- Ecuaciones implícitas de sus ejes y planos de simetría (1 punto).
- Ecuación canónica afín y sistema de referencia asociado (2 puntos).

Indicaciones: El polinomio característico de grado 4 que puedes necesitar es:

$$x^4 + 2\,x^3 - 3\,x^2$$

y algunos de los cambios de coordenadas que puedes usar son del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i = b_i/d_i + y_i & i = 1\ldots, r \\ x_j = y_j & j = r+1, \ldots, n \end{array} \right.$$