

1. Responde a las siguientes cuestiones:

- Describe un procedimiento para calcular la inversa de una matriz regular (2 puntos).
- Define los conceptos de matriz elemental tipo 1, 2 y 3. Pon un ejemplo de cada una de ellas (3 puntos).
- Describe la inversa de una matriz elemental tipo 3 (1 punto).
- Define el concepto de función determinante (por columnas) (1 punto).
- Define el concepto de forma canónica de Jordan de una matriz A (1 punto).
- Define el concepto de núcleo de una aplicación lineal y prueba que es un subespacio (2 puntos).

2. Enuncia y demuestra un teorema que garantice la existencia y unicidad de aplicaciones lineales conocidas las imágenes de una base (10 puntos).

3. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 4 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- Valores de a y b para que sean equivalentes (2 puntos)
- Para dichos valores de a y b , calcular matrices P y Q regulares tales que $B = PAQ$ (8 puntos)

4. (a) Calcular el polinomio mínimo de la matriz racional

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (5 \text{ puntos})$$

(b) Se considera la matriz racional A de orden 100 cuyo término (i, j) es $(i+j)^{(i-j)}$, si $i < j$, y 0 en caso contrario. Calcular razonadamente, A^{1997} (5 puntos).

5. Enuncia y demuestra el teorema espectral para un endomorfismo normal complejo (10 puntos).
6. Responde a las siguientes cuestiones:
- Define el concepto de punto medio en un espacio afín arbitrario de característica distinta de 2. (1 punto).
 - Prueba que la imagen de una variedad afín por una afinidad es una variedad afín (3 puntos).
 - Enuncia un teorema que relacione las afinidades con los baricentros (2 puntos).
 - Define el concepto de homotecia (1 punto).
 - Enuncia el teorema de Thales (1 punto).
 - Define el concepto de espacio vectorial unitario (1 punto)
 - Define el concepto de cuádrica regular (1 punto).
7. Calcular el polinomio de grado menor o igual que 3 cuya gráfica mejor se aproxime a los puntos: $(-1, -1), (1, 0), (1, 1), (-1, 1)$ (10 puntos)
8. Dada la cuádrica de ecuación:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 4yz + 2x + 2z = -1$$

se pide:

- Ecuación canónica métrica. (3 puntos)
- Sistema de referencia asociado. (4 puntos)
- Ecuaciones implícitas de sus ejes y planos de simetría (1 punto)
- Ecuación canónica afín. (1 punto)
- Sistema de referencia asociado (1 punto)

Indicaciones: El polinomio característico de grado 4 que puedes necesitar es:

$$x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 4x$$

y algunos de los cambios de coordenadas que puedes usar son del tipo:

$$\begin{cases} x_i = b_i/d_i + y_i & i = 1, \dots, r \\ x_j = y_j & j = r+1, \dots, n \end{cases} \quad \begin{cases} x_{r+1} = -d_0/(2b_{r+1}) + y_{r+1} \\ x_j = y_j & j \neq r+1 \end{cases}$$

$$X = \left[\begin{array}{c|c} I_{r+1} & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right] Y$$

donde M es una matriz ortogonal cuya primera columna es $(p^{-1}b_{r+1}, \dots, p^{-1}b_n)^t$.

Observación: Los estudiantes que se presenten a ambos cuatrimestres contestarán a las cuestiones: 1, 4, 6 y 8