GEOMETRIA I 8 de Febrero de 1996

1.
   - Define rango de filas y columnas de una matriz (2 puntos).
   - Enuncia y demuestra un teorema que relacione los dos conceptos anteriores (1+7 puntos).

2.
   - Describe brevemente la matriz elemental P_{42} de orden 1000 y el efecto de multiplicar una matriz A por P_{42}. (1 punto).
   - Describe un procedimiento general para calcular una base de la nulidad de una matriz. (3 puntos).

3. Demuestra o niega, mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones:
   - Toda matriz triangular superior es escalonada por filas. (1 punto).
   - Si todo vector no nulo es propio, la matriz debe ser escalar. (3 puntos).
   - Si f es una función determinante, $f(AB) = f(A)f(B)$. (2 puntos).

4. Dada la matriz racional
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
encontrar $r \in \mathbf{N}$, y P, Q regulares tales que $PAQ = [I_r, 0]$ (5 puntos).

5. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c-1 & b \end{pmatrix}$$
discutir en función de los valores de a, b y c si es diagonalizable o no. En los casos afirmativos, encontrar una matriz P regular y su inversa, tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (Ind.: Téngase especial cuidado en el caso $a = b$) (5 puntos).

6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 5 & -15 & 0 \\ 6 & 15 & 3 & -5 & 5 & 10 \\ 10 & -4 & 2 & 10 & 15 & 0 \\ 15 & -5 & -10 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & -10 & 5 & 0 & -4 \\ -5 & 5 & -10 & 15 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbf{Z}_5)$$

se pide:

- Matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea la forma canónica racional (4 puntos).
- Polinomios mínimo y característico de A (2 puntos).
- Matriz R regular tal que $R^{-1}AR$ sea forma canónica irreducible. (2 puntos).
- Matriz T regular tal que $T^{-1}AT$ sea forma canónica de Jordan. (2 puntos).