**GEOMETRIA I** **Examen Extraordinario** **6–Setiembre–96**

1. Enuncia y demuestra un teorema que relacione el rango de una matriz con los órdenes de sus submatrices regulares (5 puntos)

2. Responde a las siguientes cuestiones (1 punto cada una):

   - Define el concepto de matrices equivalentes.
   - Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius sobre solución de un sistema de ecuaciones.
   - Define el concepto de matrices semejantes.
   - Define el concepto de polinomio mínimo de una matriz.
   - Define el concepto de afinidad.
   - Enuncia un teorema que describa geométricamente las proyecciones en un espacio afín (afinidades idempotentes).
   - Define el concepto de matrices simétricas congruentes.
   - Define el concepto de forma canónica racional de una matriz.
   - Describe con precisión el tipo de matrices que aparecen en la factorización de Cholesky.
   - Sea $(V, F)$ una geometría ortogonal y $(w_1, \ldots, w_r)$ una familia de $V$. Describe con precisión un método para calcular una base de $(w_1, \ldots, w_r)^{\perp}$.

3. Sobre el cuerpo de los números racionales se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Se pide:

   - Polinomio carcaterístico de $A$ (3 puntos).
   - Valores propios de $A$ (2 puntos).
   - Subespacios fundamnetales asociados a los valores propios (3 puntos).
   - Matriz $P$ regular tal que $P^{-1}AP$ es la diagonal de los valores propios de $A$ (2 puntos).

4. 
   - Prueba que en un espacio afín euclídeo toda aplicación que conserva las distancias es una afinidad de aplicación lineal asociada una isometría. (4 puntos).
   - ¿Es cierto el resultado anterior para un espacio unitario? Justifica tu respuesta (1 punto ).

5. En el espacio euclídeo $\mathrm{R}^4$ y respecto del sistema de referencia canónico se consideran las variedades afines de ecuaciones:

$$F \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} z & = & -5 \\ t & = & 6 \end{array} \right. \qquad G \equiv \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & 1 \\ z & = & -2 \\ t & = & 3 \end{array} \right.$$

Se pide:

- Subespacios direccionales de ambas variedades (1 punto).
- Ecuaciones implícitas de la imagen de $G$ por la simetría ortogonal respecto de $F$ (4 puntos).
- Considerado $\mathrm{R}^4$ como espacio vectorial euclídeo, calcular la proyección ortogonal del vector $(0, 1, 3, -3)$ sobre el subespacio generado por $(e_3, e_4)$ (3 puntos).
- distancia entre $G$ y $F$ (2 puntos).