GEOMETRIA I **Examen Final** **20–Junio–96**

1. Responde a las siguientes cuestiones:
   - Define el concepto de razón simple de 3 puntos alineados. Pon un ejemplo (1 punto).
   - Prueba que en un espacio afín E sobre V, $P + 0_V = P, \forall P \in E$ (1 punto).
   - Enuncia el teorema fundamental de la geometría afín (1 punto).
   - Sea g una involución ($g^2 = id$) de un espacio afín en sí. ¿Es cierto que g es una simetría?. Razona tu contestación (2 puntos).
   - Enuncia el teorema de Ceva (1 punto).
   - Define el concepto de signatura de una matriz simetrica real (1 punto)
   - Describe un procedimiento para diagonalizar una forma cuadrática (3 puntos).

2. Dada la cuádrica de ecuación:

   $$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 4x + 4y - 1 = 0$$

   se pide:
   - Ecuación canónica métrica. (3 puntos)
   - Sistema de referencia asociado. (4 puntos)
   - Ecuaciones implícitas de sus ejes y planos de simetría. (1 punto)
   - Ecuación canónica afín. (1 punto)
   - Sistema de referencia asociado (1 punto)

   Indicaciones: El polinomio característico de grado 4 que puedes necesitar es:

   $$x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 12x$$

   y algunos de los cambios de coordenadas que puedes usar son del tipo:

   $$\left\{ \begin{array}{ll} x_i = b_i/d_i + y_i & i = 1 \ldots, r \\ x_j = y_j & j = r+1, \ldots, n \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_{r+1} = -d_0/(2b_{r+1}) + y_{r+1} \\ x_j = y_j \quad j \neq r+1 \end{array} \right.$$

   $$X = \left(\begin{array}{c|c} I_{r+1} & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right) Y$$

   donde M es una matriz ortogonal cuya primera columna es $(p^{-1}b_{r+1}, \ldots, p^{-1}b_n)^t$.

3. Sea f una aplicación lineal de V en W. Prueba que son equivalentes:

   (a) f es inyectiva.

   (b) La imagen de cada familia libre es libre.

   (c) La imagen de cada base es una familia libre.

   (d) Existe una base cuya imagen es una familia libre.

   (e) $\ker f = 0_V$. (5 puntos)

4. Sean $\{d_1, \ldots, d_r\}$ los valores propios de A y para cada i sea S^i un vector propio asociado a d_i. Prueba que la familia $(S^1, \ldots, S^r)$ es libre (5 puntos).

5. Sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -35 & 17 \\ -12 & 357 & 25 \\ 14 & -23 & 15 \\ 23 & 12 & -317 \end{pmatrix}$$

   Se pide:

   - Matriz Q regular tal que AQ es reducida por columnas (4 puntos)
   - rango r de A (1 punto)

6. Calcular el polinomio mínimo de la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   (5 puntos)