

1. Enuncia¹ y demuestra el teorema de Menelao. (Enunciado: 3 puntos; demostración: 7 puntos).
2. Define el concepto de matriz coordenada de un producto escalar con respecto a una base. Pon un ejemplo. (2 puntos).
3. Define el concepto de signatura de una matriz simétrica real. (1 punto).
4. Enuncia un teorema que describa la denominada factorización QR de una matriz de rango de columnas máximo. (2 puntos).
5. Afirmar razonadamente o negar mediante un contraejemplo las siguientes proposiciones:
 - El producto escalar de un vector (no nulo) por sí mismo es siempre positivo. (1 punto)
 - Un endomorfismo normal siempre es diagonalizable (por semejanza). (1 punto)
 - Dado un vector v de norma 1 en un espacio unitario $(V, \langle \rangle)$ es posible construir una base ortonormal que lo contenga. (3 puntos)
6. En un espacio afín de dimensión 3, y con respecto a un sistema de referencia $(O; e_1, e_2, e_3)$, se considera la simetría (axial) de eje la recta
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$
paralelamente al plano $z = 3$.
 - Dado el punto P de coordenadas $(2, 1, -1)$, calcular la ecuación de la imagen de la recta $P + K\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ (7 puntos)

¹ si no recuerdas el enunciado, puedes consultarlo al profesor; en este caso la puntuación máxima de esta pregunta será de 7 puntos.

- Ecuación de la simetría en el sistema de referencia $(P; v_1, v_2, v_3)$ donde

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 = e_1 + e_2 \\ v_3 = e_1 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

7. Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 2x + 4y + 2z - 2 = 0$$

se pide:

- Ecuación canónica métrica. (3 puntos)
- Sistema de referencia asociado. (4 puntos)
- Ecuaciones implícitas de sus ejes y planos de simetría. (1 punto)
- Ecuación canónica afín. (2 punto)