GEOMETRIA I **Examen Final** **14–Junio–95**

1. Demuestra los siguientes resultados:
   - Toda familia finita de vectores posee una subfamilia libre que engendra el mismo subespacio. (5 puntos)
   - La suma lineal de subespacios fundamentales es directa. (5 puntos)
2. Define los siguientes conceptos:
   - Núcleo de una aplicación lineal (1 punto).
   - Familia finita libre (1 punto).
3. Afirmar razonadamente o negar mediante un contraejemplo las siguientes proposiciones:
   - Si f es una plicación lineal definida en un espacio vect. V,

     $$dim\,\ker(f) + dim\,Im(f) = dim\,V (3 \text{ puntos})$$

   - Cada dos bases finitas de un espacio vectorial poseen el mismo número de vectores (3 puntos).
   - Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ base de V y P una matriz. Entonces, la familia $P\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ es base si y sólo si P es regular. (2 puntos)
4. Discutir en función de a y b y resolver, en los caso que sea posible, el siguiente sistema sobre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & a \\ 2x & + & by & + & b^2z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & a \end{array}\right. \qquad (10 \text{ puntos})$$

5. Dada la matriz sobre $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 & 21 & 3 \\ 8 & -7 & 21 & 21 & 7 \\ 7 & -6 & -7 & 14 & -7 \\ -7 & 14 & 8 & 7 & -14 \\ -14 & 7 & 7 & -13 & 21 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Polinomio mínimo de A. (7 puntos)
- A^{28}. (3 puntos).

6. En un plano afín y respecto de un sistema de referencia $(O; e_1, e_2)$ se considera la afinidad que deja fijas las rectas:

- $y = 2$
- $x + y - 2 = 0$
- $x - y + 2 = 0$

Se pide:

(a) Ecuación de la afinidad (6 puntos).

(b) Ecuaciones implícitas de la imagen de la recta $x + 2y = 1$ (4 puntos).

7. Dado un producto escalar sobre V probar que existe una base ortogonal (10 puntos).

8. Define los siguientes conceptos:

- Forma hermitiana regular (1 punto).
- Matriz unitaria (1 punto).

9. Enuncia:

- La ley de inercia de Sylvester de las formas hermitianas en un V complejo (2 puntos).
- El teorema espectral sobre diagonalización de matrices (2 puntos).

10. Afirmar razonadamente o negar mediante un contraejemplo las siguientes proposiciones:

    - Toda matriz simétrica racional de orden n y rango r es congruente a una matriz diagonal de la forma:

    $$diag(\overbrace{1,\ldots,1}^{s},\overbrace{-1,\ldots,-1}^{r-s},\overbrace{0,\ldots,0}^{n-r}) \quad 0 \leq s \leq r$$

      (2 puntos).

    - Los valores propios de una matriz hermitiana son reales (2 puntos).

11. Sea $(V, \langle\rangle)$ el espacio euclídeo que en cierta base (v_i) viene dado por $\langle v_1, v_1\rangle = 2; \langle v_1, v_2\rangle = 1; \langle v_2, v_2\rangle = 2$ y el endomorfismo h de matriz coordenada $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en base (v_i), calcular $h^*(v_1 + v_2)$ (5 puntos).

12. En $\mathbf{C}^2$ unitario se considera el endomorfismo h de matriz coordenada en bases canónicas

    $$\begin{pmatrix} i & 2i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

    Se pide:

    - Proyección ortogonal v de $e_1 + e_2$ sobre $Im(h)$ (2,5 puntos)
    - Antiimagen de v en $\ker h^{\perp}$. (2,5 puntos)

Observaciones:

- Los alumnos que deseen presentarse al primer cuatrimestre responderán a las cuestiones: $1, 2, 3, 4, 5$.

- Los alumnos que deseen presentarse al segundo cuatrimestre responderán a las cuestiones: $6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

- Los alumnos que deseen presentarse a ambos cuatrimestres responderán a las cuestiones: $2, 3, 5, 6, 7$.