

GEOMETRIA I

10 de Febrero de 1995

1. Enuncia y demuestra un teorema que relacione una matriz A de rango (de filas) r con la matriz $[I_r, 0]$ (6 puntos).
2. Responde a las siguientes cuestiones:
 - Define el concepto de subespacio vectorial. Pon un ejemplo en $\mathbf{Q}_2[x]$. (1 punto).
 - Describe una base de $\mathbf{R}^3$ que contenga al vector $(1, 1, 1)$. (1 punto).
 - Define el concepto de nulidad de una matriz comprobando además que es un subespacio vectorial (2 puntos).
3. Demuestra o niega, mediante un contraejemplo, las siguientes afirmaciones:
 - Las coordenadas de un vector respecto de un sistema generador son únicas (1 punto).
 - Hacer operaciones elementales en una familia de vectores no altera su rango. (4 puntos)
 - Toda matriz es semejante a una matriz diagonal (1 punto).
 - Existe una única matriz racional de orden 5 y de polinomio mínimo $x - 3$ (2 puntos).
 - Existe una única matriz racional de orden 5 y de polinomio mínimo $x^2 - 3x + 2$ (2 puntos).

4. Dada la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbf{Q}$$

se pide:

- Discutir en función de los valores de a y b si A es diagonalizable sobre $\mathbf{Q}$ (5 puntos).
- En los casos afirmativos obtener una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (5 puntos).

5. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & 9 \\ 4 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & -9 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbf{Z}_3)$$

encontrar una matriz P regular tal que $PAP^{-1} = A^t$.
(10 puntos).