

ALGEBRA LINEAL I

5-Setiembre-08

Teoría

1. Define los siguientes conceptos:
 - (a) Operación elemental de tipo iii) en una familia de vectores. Pon un ejemplo (1 punto).
 - (b) Determinante de una matriz cuadrada. Pon un ejemplo (2 puntos).
 - (c) Polinomio mínimo de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos).
2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:
 - (a) Sea P la matriz identidad de orden $n \geq 3$, salvo el término $(2, 3)$ que es un 4, y A una matriz con n columnas. Entonces, AP es la matriz que resulta de sumar a la columna 2 de A la 3 multiplicada por 4 (1 punto).
 - (b) En un subespacio S de V , la combinación lineal de dos vectores de S es un vector de S (2 puntos).
 - (c) Toda familia libre del espacio vectorial $M_2(\mathbf{R})$ es una base. (2 puntos).
3. Sean A y B matrices de orden n tales que $AB = I_n$. Afirma razonadamente el valor de BA (10 puntos).

Problemas

1. Calcular el determinante de la matriz tridiagonal de orden n cuyos términos son todos cero salvo:
 - Los diagonales que son iguales a $x^2 + 1$
 - Los de las paralelas que son iguales a x

$$\begin{vmatrix} x^2 + 1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x^2 + 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & x^2 + 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & x^2 + 1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x^2 + 1 \end{vmatrix}$$

(10 puntos).

Solución:

Denotemos

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x^2+1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x^2+1 \end{vmatrix}$$

Entonces, $\Delta_1 = 1 + x^2$ y

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} = (x^2+1)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$$

Supongamos $n > 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (x^2+1)\Delta_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{n \geq 2}{=} (x^2+1)\Delta_{n-1} - x(x\Delta_{n-2}) = (x^2+1)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2} \\ &= (x^2+1)(1+x^2+\dots+x^{2(n-1)}) - x^2(1+x^2+\dots+x^{2(n-2)}) \\ &= x^2(x^{2(n-1)}+1+x^2+\dots+x^{2n-1}) = 1+x^2+\dots+x^{2n} \end{aligned}$$

2. Dada la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y h el endomorfismo de $\mathbf{Q}^3$ dado por

$$(hv_1, hv_2, hv_3) = (v_1, v_2, v_3)A$$

donde

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad v_2 = (1, -1, 0) \quad v_3 = (1, 1, 1)$$

se pide:

- (a) Núcleo e Imagen del endomorfismo (1 punto).
- (b) Matriz coordenada de h en la base

$$(w_1, w_2, w_3) = (-2v_1 + v_3, -2v_1 + 2v_3, -4v_1 + 2v_2 + 4v_3) \quad (2 \text{ puntos})$$

- (c) Matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ es la forma racional F de A (2 puntos).

- (d) Forma irreducible G de A y matriz S regular tal que $S^{-1}AS = G$ (2 puntos).
- (e) Forma de Jordan, si existe, J de A y matriz T regular tal que $T^{-1}AT = J$ (2 puntos).
- (f) Base de $\mathbf{Q}^3$, si existe, en la que la m.c. de h es J (1 punto).

Solución

- (a) A es, claramente, regular; por tanto, h es isomorfismo y, en consecuencia, el núcleo es $(0, 0, 0)$ y la imagen es $\mathbf{Q}^3$.
- (b)

$$\begin{aligned} hw_1 &= h(-2v_1 + v_3) = -2hv_1 + hv_3 = -2v_2 + (-2v_1 + 2v_2 + 2v_3) = \\ &= -2v_1 + 2v_3 = w_2 = 0.w_1 + 1.w_2 + 0.w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hw_2 &= h(-2v_1 + 2v_3) = -2hv_1 + 2hv_3 = -2v_2 + 2(-2v_1 + 2v_2 + 2v_3) = \\ &= -4v_1 + 2v_2 + 4v_3 = w_3 = 0.w_1 + 0.w_2 + 1.w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hw_3 &= h(-4v_1 + 2v_2 + 4v_3) = -4hv_1 + 2hv_2 + 4hv_3 = \\ &= -4v_2 + 2(-v_1 + 2v_2) + 4(-2v_1 + 2v_2 + 2v_3) = -10v_1 + 8v_2 + 8v_3 \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} -10v_1 + 8v_2 + 8v_3 &= aw_1 + bw_2 + cw_3 \\ &\Downarrow \\ -10v_1 + 8v_2 + 8v_3 &= a(-2v_1 + v_3) + b(-2v_1 + 2v_3) + c(-4v_1 + 2v_2 + 4v_3) \\ &\Downarrow \\ -10v_1 + 8v_2 + 8v_3 &= -(2a + 2b + 4c)v_1 + 2cv_2 + (a + 2b + 4c)v_3 \\ &\Downarrow \\ c = 4 \quad a + 2b &= -8 \quad 2a + 2b = -6 \implies a = 2 \quad b = -5 \quad c = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la m.c. pedida es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (c) Observando¹ el resultado anterior se tiene directamente

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (w_1, w_2, w_3) = (v_1, v_2, v_3)P \implies P = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

¹o aplicando el procedimiento **RACIONAL**

- (d) Aplicando el procedimiento **IRREDUCIBLE**, el único factor invariante es

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$$

luego hay dos cajas y dos pilares; operando y teniendo en cuenta P ,

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline & & 2 \end{array} \right] \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (e) Aplicando el procedimiento **JORDAN**, tendremos dos bloques de Jordan, asociados a los valores propios 1 doble y 2 simple. Calculando asimismo los pilares correspondientes a dichos valores propios, y teniendo en cuenta P ,

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 2 \end{array} \right] \quad T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (f)

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) &= (v_1, v_2, v_3)T = (2v_1, -2v_1 + 2v_2, -2v_1 + 2v_2 + v_3) = \\ &= (2(1, 1, 0), -2(1, 1, 0) + 2(1, -1, 0), -2(1, 1, 0) + 2(1, -1, 0) + (1, 1, 1)) \\ &= ((2, 2, 0), (0, -4, 0), (1, -3, 1)) \end{aligned}$$