**ALGEBRA LINEAL I** **19–Junio–08**

**Teoría**

1. Define los siguientes conceptos:

   (a) Matriz elemental de tipo i). Pon un ejemplo (1 punto).

   (b) Factorización LU de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos).

   (c) Vector propio de un endomorfismo. Pon un ejemplo (1 punto).

   **Solución**:

   (a) Def. 6.1, p. 29; ejemplo: la $P_{24}$ en la p. 31.

   (b) Def. 8.1, p. 39; ejemplo: $(a) = (1)(a)$ , para cualquier $a$.

   (c) Def. 5.1.1.2, p. 174; ejemplo: el que sigue a continuación.

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:

   (a) Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico (3 puntos).

   (b) Todo endomorfismo es diagonalizable (1 punto).

   (c) Toda matriz cuadrada real posee forma de Jordan (2 puntos).

   **Solución**:

   (a) Sí; es la prop. 2.10, p.86

   (b) No; como contraejemplo tomar el segundo de la p. 174

   (c) No; como contraejemplo tomar la matriz $H$ de la p. 89; su polinomio característico $x^2 + 1$ no *escinde* en $\mathbf{R}$.

3. (a) Enuncia y demuestra un resultado sobre la existencia de bases en los subespacios de $K^n$ (5 puntos).

   (b) Enuncia y demuestra un resultado que caracterice un isomorfismo mediante las imágenes de una base (5 puntos).

   **Solución**:

   (a) Se trata del teorema 10.7 de la p. 63. Pudieran servir también 10.12 i), ii) ó iv) de la p. 64

   (b) Es la prop. 4.9 de las pp. 158 y 159.

**Problemas**

1. *Dados dos números racionales $a, b$ cualesquiera, se considera la matriz racional $A$ de orden 18 cuyos términos diagonales son todos $a$ y los no diagonales son todos $b$. Se pide:*

   (a) *Calcular el determinante de $A$* (5 puntos).

   (b) *Si $b \neq 0$, encontrar una matriz $P$ regular tal que*

   $$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & (17b+a)(b-a) \\ 1 & 16b+2a \end{pmatrix}P$$

   *es diagonal* (2 puntos)

   (c) *¿Es diagonalizable $A$? En caso afirmativo, encontrar matrices $T$ y $D$ tales que $T^{-1}AT = D$ sea diagonal.* (3 puntos)
   Indicación: Considerar una forma cíclica $C$ de $A$ y, apoyándose en el apartado anterior, intentar diagonalizar (o calcular la forma de Jordan de) $C$. La matriz $T$ será producto de dos, producto que se deja indicado.

**Solución**:

(a) Sumando a la primera fila las demás, el determinante vale

$$\begin{vmatrix} a+17b & a+17b & a+17b & a+17b & \cdots & a+17b \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ b & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+17b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ b & b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+17b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a+17b)(a-b)^{17}$$

(b) Para el siguiente apartado, los valores propios de la matriz de orden 2 son: $17b+a$ y $a-b$. Ahora,

$$V(17b+a) = \mathbf{Q} < (b-a,1) > \qquad V(17b+a) = \mathbf{Q} < (-17b-a,1) >$$

Entonces,

$$P = \begin{bmatrix} b-a & -17\,b-a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & (17b+a)(b-a) \\ 1 & 16b+2a \end{pmatrix} P = \mathrm{diag}[17b{+}a, a{-}b]$$

(c)

- En primer lugar, utilizaremos la indicación por estar basada en una de las tareas realizadas, siendo el caso $b=0$ trivial de respuesta $T=I$, $D=A$. Podemos pues suponer que $b \neq 0$.
  De acuerdo al procedimiento del texto y a la tarea realizada en la semana correspondiente

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & (17\,b+a)\,(b-a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 16\,b+2\,a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a-b \end{bmatrix} = C$$

  Poniendo $Q = \mathrm{diag}[P, I_{16}]$,

$$Q^{-1}CQ = \mathrm{diag}[17b+a, a-b, \ldots, a-b]$$

  Basta hacer el producto $T = RQ$ para obtener

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}[17b+a, a-b, \ldots, a-b]$$

- Claro está, el lector que desee obviar la indicación puede observar que el polinomio característico, de acuerdo al primer apartado, es

$$[(x-a)+17(-b)][(x-a)-(-b)]^{17} = [x-(a+17b)][x-(a-b)]^{17}$$

En consecuencia[1], los valores propios son $(a+17b)$ y $(a-b)$ el primero simple y el segundo de multiplicidad algebraica 17.
Ahora

$$\dim V(a-b) = 18 - \operatorname{rang}((a-b)I - A) = 18 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & \cdots & -b \end{pmatrix} = 17$$

pues $b \neq 0$. Por tanto, la matriz es diagonalizable.
Para encontrar $T$:

$$V(a+17b) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 17b & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & -b & \cdots & 17b \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (1, \ldots, 1) >$$

$$V(a-b) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & \cdots & -b \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (1, -1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, -1) >$$

Finalmente, $P$ es la matriz cuyas columnas son los 1+17 vectores que acabamos de obtener y

$$D = \operatorname{diag}[a+17b, a-b, \cdots, a-b]$$

Elija el lector el método que más le guste.

2. *Dada la matriz racional*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*y $h$ el endomorfismo de un espacio vectorial $V$ dado por*

$$(hv_1, hv_2, hv_3) = (v_1, v_2, v_3)A$$

*se pide:*

(a) *Núcleo e Imagen del endomorfismo* (1 punto).

(b) *Matriz coordenada de $h$ en la base*

$$(w_1, w_2, w_3) = (-2v_1 + v_3, -2v_1 + 2v_3, -4v_1 + 2v_2 + 4v_3) \quad \text{(2 puntos)}$$

(c) *Matriz $P$ regular tal que $P^{-1}AP$ es la forma racional $F$ de $A$* (2 puntos).

(d) *Forma irreducible $G$ de $A$ y matriz $S$ regular tal que $S^{-1}AS = G$* (2 puntos).

[1]excluyendo el caso $b = 0$ por ser de respuesta inmediata $T = I$, $D = A$

(e) *Forma de Jordan, si existe,* $J$ *de* $A$ *y matriz* $T$ *regular tal que* $T^{-1}AT = J$ (2 puntos).

(f) *Base de* $V$*, si existe, en la que la m.c. de* $h$ *es* $J$ (1 punto).

**Solución**

(a) $A$ es, claramente, regular; por tanto, $h$ es isomorfismo y, en consecuencia, el núcleo es $(0_V)$ y la imagen es $V$.

(b)

$$\begin{aligned} hw_1 &= h(-2v_1+v_3) = -2hv_1 + hv_3 = -2v_2 + (-2v_1+2v_2+2v_3) = \\ &= -2v_1 + 2v_3 = w_2 = 0.w_1 + 1.w_2 + 0.w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hw_2 &= h(-2v_1+2v_3) = -2hv_1 + 2hv_3 = -2v_2 + 2(-2v_1+2v_2+2v_3) \\ &= -4v_1 + 2v_2 + 4v_3 = w_3 = 0.w_1 + 0.w_2 + 1.w_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hw_3 &= h(-4v_1+2v_2+4v_3) = -4hv_1 + 2hv_2 + 4hv_3 = \\ &= -4v_2 + 2(-v_1+2v_2) + 4(-2v_1+2v_2+2v_3) = -10v_1 + 8v_2 + 8v_3 \end{aligned}$$

Ahora

$$-10v_1 + 8v_2 + 8v_3 = aw_1 + bw_2 + cw_3$$

$$\Downarrow$$

$$-10v_1 + 8v_2 + 8v_3 = a(-2v_1+v_3) + b(-2v_1+2v_3) + c(-4v_1+2v_2+4v_3)$$

$$\Downarrow$$

$$-10v_1 + 8v_2 + 8v_3 = -(2a+2b+4c)v_1 + 2cv_2 + (a+2b+4c)v_3$$

$$\Downarrow$$

$$c = 4 \quad a + 2b = -8 \quad 2a + 2b = -6 \Longrightarrow a = 2 \quad b = -5 \quad c = 4$$

Por tanto, la m.c. pedida es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Observando[2] el resultado anterior se tiene directamente

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (w_1, w_2, w_3) = (v_1, v_2, v_3)P \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

[2] o aplicando el procedimiento **RACIONAL**

(d) Aplicando el procedimiento **IRREDUCIBLE**, el único factor invariante es

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

luego hay dos cajas y dos pilares

$$G = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \\ 1 & 2 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right) \qquad Q = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad S = PQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Aplicando el procedimiento **JORDAN**, tendremos dos bloques de Jordan, asociados a los valores propios 1 doble y 2 simple. Calculando asimismo los pilares correspondientes a dichos valores propios,

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 2 \end{array}\right) \qquad Q = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad T = PQ = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f)

$$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)T = (2v_1, -2v_1 + 2v_2, -2v_1 + 2v_2 + v_3)$$