ALGEBRA LINEAL I **7–Setiembre–07**

Responde a las cuestiones 1 y 4 o a la 2 y 3.

1. (a) Define los siguientes conceptos:

    i. Valor propio de un endomorfismo. Pon un ejemplo (1 punto).
    Respuesta: Es el valor propio de cualquier matriz coordenada. Por ejemplo, para el endomorfismo identidad, el 1.

    ii. Monomorfismo. Pon un ejemplo (1 punto).
    Respuesta: Es una aplicación lineal inyectiva; por ejemplo, la aplicación idéntica.

    iii. Divisores elementales de un endomorfismo. Pon un ejemplo (1 punto).
    Respuesta: Son los divisores elementales de cualquiera de sus matrices coordenadas; es decir, los factores primarios de los invariantes. Por ejemplo, para el endomorfismo identidad de orden 2: $x-1$, $x-1$.

   (b) Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:

    i. Dadas dos matrices regulares A y B, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (2 puntos).
    Respuesta: Cierta. Completar

    $$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = \cdots = I$$

    $$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = \cdots = I$$

    ii. Dadas dos matrices multiplicables A y B, $(AB)^t = A^tB^t$ (2 puntos).
    Respuesta: Falsa. Sirve prácticamente cualquier par de matrices (ninguna escalar).

    iii. Dadas dos matrices del mismo orden A y B, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (3 puntos).
    Respuesta: Cierta. Completar el siguiente argumento. Si una es no regular el producto tampoco y ambos determinantes son cero; para el caso de ambas regulares se descomponen en producto de matrices elementales y aquí el resultado es cierto (demostrado con anterioridad).

2. Enuncia y demuestra un resultado que describa 4 caracterizaciones de aplicación lineal inyectiva (10 puntos).

   Respuesta: Es la proposición 4.9 de la página 143 del libro de texto.

3. Calcula la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(10 puntos).

Solución:

$$P_{41}A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$P_{31}(-2)B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$P_{23}C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

$$P_{34}D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

Finalmente,

$$P_{53}(2)E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Por tanto,

$$P_{53}(2)P_{34}P_{23}P_{31}(-2)P_{41}A = U$$

Saltando las matrices tipo 1,

$$P_{53}(2)P_{34}P_{21}(-2)P_{23}P_{41}A = U$$

$$P_{53}(2)P_{21}(-2)P_{34}P_{23}P_{41}A = U$$

Y

$$P_{34}P_{23}P_{41}A = (P_{53}(2)P_{21}(-2))^{-1}U = (P_{21}(2)P_{53}(-2))U$$

Por tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Sea $h\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la correspondencia dada por

$$h(v_1) = v_2 \quad h(v_2) = -4v_1 + 4v_2 \quad h(v_3) = 2v_3$$

donde

$$v_1 = (3,0,0) \quad v_2 = (1,-1,0) \quad v_3 = (1,1,-1)$$

Se pide:

(a) Probar que h define un endomorfismo (0.5 puntos).

(b) Matriz coordenada A de h en la base (v_1, v_2, v_3) (0.5 puntos).

(c) $\operatorname{Im}(h)$ y $\ker h$ (1 punto).

(d) Matrices M y N regulares tales que MAN es la $[I_r, 0]$ respectiva (1 punto).

(e) Bases (u_1, u_2, u_3) y (z_1, z_2, z_3) tales que $h(u_i) = z_i, i = 1, 2, 3$ (1.5 puntos).

(f) Polinomio mínimo de h (0.5) puntos.

(g) Matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ es la forma racional F de A (0.5 puntos).

(h) Base de $\mathbf{R}^3$ en la que la matriz coordenada de h es F (1 punto).

(i) Matriz T regular, si existe, tal que $T^{-1}AT = J$ es la forma de Jordan de A (1.5 puntos).

(j) Base (w_1, w_2, w_3) en la que la matriz coordenada de h es J (1.5 puntos).

(k) ¿Es diagonalizable h? En caso afirmativo, describe una base de vectores propios (0.5 puntos).

Todos los vectores obtenidos deben expresarse en la forma (a, b, c).

Solución

(a) Es suficiente probar que (v_1, v_2, v_3) es una base y, por dimensiones, que es libre. Pero esto es inmediato pues el rango de la matriz que forman es 3.

(b) Directamente,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Puesto que $\mathrm{rang}(A) = 3$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbf{R}^3$ y $\ker h = \{0\}$.

(d) Podríamos aplicar el procedimiento EQUIVALENTE, pero observamos que A es regular y directamente

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = I_3$$

Luego,

$$M = I_3 \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(e) Así,

$$(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)N = (u_1 - 1/4\, u_2, u_1, 1/2\, u_3) =$$
$$= ((3,0,0) - 1/4\,(1,-1,0), (3,0,0), 1/2\,(1,1,-1)) =$$
$$= ((11/4, 1/4, 0), (3,0,0), (1/2, 1/2, -1/2))$$

$$(z_1, z_2, z_3) = (v_1, v_2, v_3)M^{-1} = (v_1, v_2, v_3) = ((3,0,0), (1,-1,0), (1,1,-1))$$

(f) Es el polinomio mínimo de A; es decir, el $\mathrm{mcm}(x^2-4x+4, x-2) = x^2-4x+4$

(g) De acuerdo, con el item anterior, la forma racional F de A es A; tomamos, $P = I_3$.

(h) La base pedida es, pues, la inicial $(v_1, v_2, v_3) = ((3,0,0), (1,-1,0), (1,1,-1))$.

(i) La forma de Jordan de h es la de A; puesto que A es cíclica con dos compañeras $C(x^2 - 4x + 4)$ y 2, calculamos la forma de Jordan J_1 de la primera, que es $J_2(2)$, siendo el pilar $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$Q = \mathrm{diag}[Q_1, 1] \Longrightarrow Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}[J_2(2), 2]$$

y $T = QP = Q$.

(j) La base es

$$(w_1, w_2, w_3) = (v_1, v_2, v_3)T = (v_1, -2v_1+v_2, v_3) = ((3,0,0), (-7-1,0), (1,1,-1))$$

(k) h no puede ser diagonalizable, porque su forma de Jordan no es diagonal.