

ALGEBRA LINEAL I

20–Junio–07

Teoría

- Define los siguientes conceptos:
 - Bloque de una matriz. Pon un ejemplo (1 punto).
 - Núcleo de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos).
 - Vector propio de una matriz. Pon un ejemplo (1 punto).
- Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:
 - Si en una matriz cuadrada se permutan dos columnas consecutivas su determinante cambia de signo (3 puntos).
 - Toda matriz cuadrada es semejante a una diagonal (1 punto).
 - Todo endomorfismo posee forma de Jordan (2 puntos)
- Enuncia y demuestra un resultado que relacione el rango de filas y el de columnas en una matriz (10 puntos).

Problemas

- Calcula la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(10 puntos).

Solución:

$$P_{51}A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = B$$

$$P_{41}(-2)B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = C$$

$$P_{42}(-4/3)C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 4/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = D$$

$$P_{34}D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} = E$$

$$P_{53}(1)E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5/3 \end{bmatrix} = F$$

Finalmente,

$$P_{45}F = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Por tanto,

$$P_{45}P_{53}(1)P_{34}P_{42}(-4/3)P_{41}(-2)P_{51}A = U$$

Saltando las matrices tipo 1,

$$P_{45}P_{53}(1)P_{32}(-4/3)P_{34}P_{41}(-2)P_{51}A = U$$

$$P_{45}P_{53}(1)P_{32}(-4/3)P_{31}(-2)P_{34}P_{51}A = U$$

$$P_{43}(1)P_{45}P_{32}(-4/3)P_{31}(-2)P_{34}P_{51}A = U$$

$$P_{43}(1)P_{32}(-4/3)P_{45}P_{31}(-2)P_{34}P_{51}A = U$$

$$P_{43}(1)P_{32}(-4/3)P_{31}(-2)P_{45}P_{34}P_{51}A = U$$

Y

$$P_{45}P_{34}P_{51}A = (P_{43}(1)P_{32}(-4/3)P_{31}(-2))^{-1}U = (P_{31}(2)P_{32}(4/3)P_{43}(-1))U$$

Por tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Sea $h: \mathbf{Q}_2[x] \longrightarrow \mathbf{Q}_2[x]$ la correspondencia dada por

$$h(f_1) = f_2 \quad h(f_2) = -4f_1 + 4f_2 \quad h(f_3) = 2f_3$$

donde

$$f_1 = 3 \quad f_2 = 1 - x \quad f_3 = 1 + x - x^2$$

Se pide:

- Probar que h define un endomorfismo (0.5 puntos).
- Matriz coordenada A de h en la base (f_1, f_2, f_3) (0.5 puntos).
- $\text{Im}(h)$ y $\ker h$ (1 punto).
- Matrices M y N regulares tales que MAN es la $[I_r, 0]$ respectiva (1 punto).
- Bases (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3) tales que $h(p_i) = q_i, i = 1, 2, 3$ (1.5 puntos).
- Polinomio mínimo de h (0.5 puntos).
- Matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ es la forma racional F de A (0.5 puntos).
- Base de $\mathbf{Q}_2[x]$ en la que la matriz coordenada de h es F (1 punto).
- Matriz T regular, si existe, tal que $T^{-1}AT = J$ es la forma de Jordan de A (1.5 puntos).
- Base (g_1, g_2, g_3) en la que la matriz coordenada de h es J (1.5 puntos).
- ¿Es diagonalizable h ? En caso afirmativo, describe una base de vectores propios (0.5 puntos).

Todos los polinomios obtenidos deben expresarse en la forma $a + bx + cx^2$.

Solución

- Es suficiente probar que (f_1, f_2, f_3) es una base y, por dimensiones, que es libre. Pero esto es inmediato pues al aumentar de grado cada polinomio ninguno puede ser c.l. de los anteriores.
- Directamente,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Puesto que $\text{rang}(A) = 3$, $\text{Im}(h) = \mathbf{Q}_2[x]$ y $\ker h = \{0\}$.

- (d) Podríamos aplicar el procedimiento EQUIVALENTE, pero observamos que A es regular y directamente

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = I_3$$

Luego,

$$M = I_3 \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (e) Así,

$$\begin{aligned} (p_1, p_2, p_3) &= (f_1, f_2, f_3)N = (f_1 - 1/4 f_2, f_1, 1/2 f_3) = \\ &= (3 - 1/4(1-x), 3, 1/2(1+x-x^2)) = (11/4 + 1/4 x, 3, 1/2 + 1/2 x - 1/2 x^2) \\ (q_1, q_2, q_3) &= (f_1, f_2, f_3)M^{-1} = (f_1, f_2, f_3) = (3, 1-x, 1+x-x^2) \end{aligned}$$

- (f) Es el polinomio mínimo de A ; es decir, el $\text{mcm}(x^2-4x+4, x-2) = x^2-4x+4$

- (g) De acuerdo, con el ítem anterior, la forma racional F de A es A ; tomamos, $P = I_3$.

- (h) La base pedida es, pues, la inicial $(f_1, f_2, f_3) = (3, 1-x, 1+x-x^2)$.

- (i) La forma de Jordan de h es la de A ; puesto que A es cíclica con dos compañeras $C(x^2-4x+4)$ y 2 , calculamos la forma de Jordan J_1 de la primera que es $J_2(2)$ siendo el pilar $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$Q = \text{diag}[Q_1, 1] \implies Q^{-1}AQ = \text{diag}[J_2(2), 2]$$

y $T = QP = Q$.

- (j) La base es

$$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3)T = (f_1, -2f_1 + f_2, f_3) = (3, -7-x, 1+x-x^2)$$

- (k) h no puede ser diagonalizable, porque su forma de Jordan no es diagonal.