ALGEBRA LINEAL I **7–Setiembre–06**

La duración del examen es de dos horas. Elige una de las siguientes opciones

$$1+2+4 \quad \text{o} \quad 1+2+5 \quad \text{o} \quad 3+4 \quad \text{o} \quad 3+5$$

1. Define los siguientes conceptos:

   (a) Rango de columnas de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos)
   Es la definición (I.5.1.ii), p. 13 del libro de texto. El rango de columnas de (1) es 1.

   (b) Núcleo de una aplicación lineal. Pon un ejemplo (2 puntos)
   Está contenida en la proposición III.4.8 p.142 del libro. La aplicación idéntica en V tiene núcleo 0_V

   (c) Valor propio de un endomorfismo. Pon un ejemplo (2 puntos)
   Es una raíz de su polinomio característico. El 1 es valor propio del endomorfismo identidad.

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados

   (a) El determinante de una matriz no regular es cero (2 puntos).
   Mediante operaciones elementales pasa a una matriz con la última fila cero; ésta tiene determinante 0. Luego el determinante pedido es una constante k multiplicada por 0; así las cosas, 0.

   (b) El polinomio mínimo de A es divisor del polinomio característico de A (2 puntos).
   Sabemos que el polinomio mínimo de cada vector de la base canónica es divisor del característico. Lo mismo cumple su m.c.m. que es el polinomiko mínimo de la matriz.

3. Enuncia y demuestra un resultado que dé cuatro caracterizaciones diferentes de monomorfismo (10 puntos)
   Es la proposición III.4.9, p. 143 del libro.

4. Se considera el endomorfismo $h\colon \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$ dado por

$$h(1) = 1+x \quad h(1+x) = 1-x \quad h(1+x+x^2) = 1+x+x^2$$

   Se pide:

   (a) Matriz coordenada A de h en la base $(1, 1+x, 1+x+x^2)$ (3 puntos).

   (b) Bases de $\ker h$ e $\operatorname{Im}(h)$ (2 puntos).

   (c) Matrices P y Q regulares tales que PAQ es la $[I_r, 0]$ respectiva (2 puntos).

(d) Bases (f_1, f_2, f_3) y (g_1, g_2, g_3) tales que

$$h(f_i) = g_i, i \leq r \quad h(f_j) = 0,\, j > r \quad \text{(2 puntos)}.$$

(e) Rango de h (1 punto).

Solución

(a) $\mathrm{Im}(h) = \mathbf{R} < 1+x, 1-x, 1+x+x^2 >$, luego una base es

$$(1+x, 1-x, 1+x+x^2)$$

Por dimesiones, el núcleo es 0 y su base es el vacío.

(b)
$$\begin{array}{l} h(1) = 1+x = 0.1 + 1(1+x) + 0(1+x+x^2) \\ h(1+x) = 1-x = 2.1 - 1(1+x) + 0(1+x+x^2) \\ h(1+x+x^2) = 1+x+x^2 = 0.1 + 0(1+x) + 1(1+x+x^2) \end{array}$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(d) Por tanto,

$$(f_1, f_2, f_3) = (1, 1+x, 1+x+x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2+x, 1+x+x^2)$$

$$(g_1, g_2, g_3) = (1, 1+x, 1+x+x^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (1, 1+x, 1+x+x^2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1+x, 2, 1+x+x^2)$$

(e) Se trata del rango de cualquiera de sus matrices coordenadas: 3.

5. Se considera el endomorfismo $h\colon \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$ dado por

$$h(1) = 1+x \quad h(1+x) = 1-x \quad h(1+x+x^2) = 1+x+x^2$$

Se pide:

(a) Matriz coordenada A de h en la base $(1, 1+x, 1+x+x^2)$ (3 puntos).

(b) Rango de h (1 punto).

(c) Forma canónica de Jordan, si existe, J de h (2 puntos)

(d) Matriz T regular tal que $T^{-1}AT = J$ (2 puntos)

(e) Base (f_1, f_2, f_3) en la que la matriz coordenada de h es J (1 punto)

(f) ¿Es diagonalizable h?. En caso afirmativo, describe una base de vectores propios (1 punto).

Solución

(a)
$$\begin{array}{l} h(1) = 1 + x = 0.1 + 1(1+x) + 0(1+x+x^2) \\ h(1+x) = 1 - x = 2.1 - 1(1+x) + 0(1+x+x^2) \\ h(1+x+x^2) = 1+x+x^2 = 0.1 + 0(1+x) + 1(1+x+x^2) \end{array}$$

Por tanto,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Se trata del rango de cualquiera de sus matrices coordenadas: 3.

(c) La propia A es una forma cíclica de sí misma. Debemos, pues, tratar por separado sus dos cajas compañeras.

La primera es $C(x-2)(x+1)$ que conduce a $J_1 = \mathrm{diag}[-2, 1]$ con pilares $Q_{11} = \binom{-1}{1}$ y $Q_{12} = \binom{2}{1}$ Por tanto, $Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La segunda caja es $C(x-1)$ semejante a sí misma y $Q_2 = 1$. En definitiva,
$$J = \mathrm{diag}[-2, 1, 1]$$

(d)
$$T = P\mathrm{diag}[Q_1, Q_2] = \mathrm{diag}[Q_1, Q_2] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)
$$(f_1, f_2, f_3) = (1, 1+x, 1+x+x^2)T = (x, 3+x, 1+x+x^2)$$

(f) h sí es diagonalizable pues su forma de Jordan es diagonal. Como base de vectores propios sirve la asociada a esta matriz
$$(x, 3+x, 1+x+x^2)$$