ALGEBRA LINEAL I **28–Junio–06**

1. Enuncia y demuestra un teorema que caracterize las matrices regulares mediante su rango (10 puntos).

   Véase el libro de texto, Corolario 6.16, p. 26

2. (a) Define los siguientes conceptos:
   i. Polinomio mínimo de una matriz. Pon un ejemplo (1 punto).
   El polinomo mónico de menor grado f tal que $f(A) = (0)$; por ejemplo, x es el polinomio mínimo de la matriz cero.
   ii. Matriz compañera asociada a un polinomio mónico. Pon un ejemplo (1 punto).
   Véase el libro de texto, definición 3.7, p. 80. Por ejemplo, (0) es la matriz compañera asociada a x.
   iii. Aplicación lineal. Pon un ejemplo (1 punto).
   Véase el libro de texto, definición 4.1, p. 140 y cualquiera de lo ejemplos de esa página.
   iv. Rango de una aplicación lineal. Pon un ejemplo (1 punto).
   Es la dimensión del subespacio imagen. Por ejemplo, en la aplicación idéntica la dimensión del espacio.

   (b) Enuncia el teorema de Hamilton-Cayley (1 punto).
   Existen varios versiones, todas ellas equivalentes a:

   El polinomio mínimo de una matriz divide al característico.

   (c) Afirma razonadamente o niega con un contraejemplo los siguientes enunciados:
   i. Todo endomorfismo posee forma de Jordan (1 punto).
   No, si la m.c. es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y el cuerpo es $\mathbf{R}$, no puede haber forma de Jordan, pues el polinomio característico es $x^2 + 1$.
   ii. Un endomorfismo es inyectivo si y sólo si es sobre (2 puntos).

   $$\ker h = 0_V \iff \dim \ker h = 0 \iff \dim hf(V) = \dim V \iff h(V) = V$$

   iii. Una aplicación lineal es isomorfismo si y sólo si la imagen de una base es una base (2 puntos).
   Véase el libro de texto, proposición 4.10, p. 143

3. Discutir en función de los valores de a y b si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbf{R}$.

En los casos afirmativos encontrar P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (10 puntos).

$$\det(xI - A) = (x-5)(x+1)(x-b)$$

Por tanto,

- Si $5 \neq b \neq -1$ los tres valores son simples.
  Por tanto, A es diagonalizable y

$$V(b) = \mathcal{N}(bI - A) = \cdots = \mathbf{R} < (0, a/(1+b), 1) >$$
$$V(5) = \mathcal{N}(5I - A) = \cdots = \mathbf{R} < ((5-b)/3, a/6, (5-b)/3) >$$
$$V(-1) = \mathcal{N}(-I - A) = \cdots = \mathbf{R} < (0, 1, 0) >$$

  Entonces,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & (5-b)/3 & 0 \\ a/(1+b) & a/6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \mathrm{diag}[b, 5, -1]$$

- $b = 5 \Longrightarrow$

$$5I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -a \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  cuyo rango es 2 para cualquier valor de a. Por tanto,

$$\dim V(5) = 3 - 2 = 1$$

  que no llega a la multiplicidad algebraica 2 del valor propio 5. Así, A no es diagonalizable.

- $b = -1 \Longrightarrow$

$$(-1)I - A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  cuyo rango es 1 si y sólo si $a = 0$. Por tanto, $\dim V(-1) = 3 - 1 = 2$ que es la multiplicidad algebraica 2 del valor propio -1. Así, A es diagonalizable si y sólo si $a = 0$. Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V(-1) = \mathcal{N}(-I - A) = \cdots = \mathbf{R} < (0,1,0), (0,0,1)) >$$
$$V(5) = \mathcal{N}(5I - A) = \cdots = \mathbf{R} < (2, 0, 1) >$$

y

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \mathrm{diag}[-1, -1, 5]$$

4. Sea h el endomorfismo de $\mathbf{Q}_2[x]$ dado por $h(a+bx+cx^2) = 2cx^2+2(b+c)x$. Se pide:

   (a) Bases del núcleo e imagen (1 punto).

   (b) Matriz coordenada A de h en la base $(1, x, x^2)$ (1 punto).

   (c) Forma racional F de A (1 punto).

   (d) Matriz P tal que $P^{-1}AP = F$ (2 puntos).

   (e) Base de $\mathbf{Q}_2[x]$ en la que la matriz coordenada de h es F (1 punto)

   (f) Forma de Jordan, si existe, J de A (1 punto).

   (g) En su caso, matriz T tal que $T^{-1}AT = J$ (2 puntos).

   (h) En su caso, base de $\mathbf{Q}_2[x]$ en la que la matriz coordenada de h es J (1 punto)

   (a) La imagen está generada por

   $$h(1) = 0, h(x) = 2x, h(x^2) = 2x^2 + 2x$$

   y una base que contiene $(0, 2x, 2x+2x^2)$ es $(2x, 2x+2x^2)$ ó simplemente (x, x^2).

   Por tanto, la dimensión del núcleo es $3 - 2 = 1$. Puesto que $1 \in \ker h$, (1) es una base.

   (b) Matriz coordenada A de h en la base $(1, x, x^2)$ (1 punto).

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c) Contestamos a la par que la siguiente

   (d) Matriz P tal que $P^{-1}AP = F$ (2 puntos).

   Pongamos I_3 debajo de A:

   $$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Directamente tenemos un bloque 1×1. Procedemos a MINIMO1 en la submatriz inferior.

Cambiamos las columnas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Y las filas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dividimos la fila 3 por 2

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la columna 3 por 2

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sumamos a la fila 2 la 3 multiplicada por -2

$$\left(\begin{array}{ccr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Y a la columna 3 la 2 por -2

$$\left(\begin{array}{ccr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido una forma cíclica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, no es una forma racional, sumamos a la primera columna la segunda y obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

y ahora restamos a la segunda fila la primera.

$$\left(\begin{array}{ccr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

es decir, nada.

Comenzamos con **MINIMO1** desde el principio. Cambiamos las filas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{ccr} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

y las columnas 2 y 3

$$\left(\begin{array}{crc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Dividimos la tercera fila por -4

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

y multiplicamos la tercera columna por -4

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Sumamos a la segunda fila la tercera multiplicada por -4

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

y sumamos a la tercera columna la segunda multiplicada por 4

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Hemos terminado

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(e) La nueva base es

$$(1, x, x^2)P = (1 + x^2, 2x + 2x^2, 8x + 4x^2)$$

(f) Podemos utilizar la forma cíclica C de A.

La forma de Jordan asociada a la caja (0) de C es 0. El polinomio mínimo de la otra caja es $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Luego su forma de

Jordan es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Por tanto, la forma de Jordan de A es

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 2 & 0 \\ & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(g) Para la primera caja la matriz del cambio es (1).
Para la segunda caja, tenemos como polinomio mínimo $(x-2)^2$ con su único factor. Luego el pilar asociado al valor propio 2 es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Por tanto, la matriz Q es $\left(\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 1 & -2 \\ & 0 & 1 \end{array}\right)$.
Finalmente,

$$T = RQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(h) La nueva base es

$$(1, x, x^2)T = (1, x^2, 2x)$$