ALGEBRA LINEAL I **19–Junio–06**

Teoría

1. Define los siguientes conceptos:
   (a) Operación elemental en una familia de vectores (una de ellas). Pon un ejemplo (1 punto).
   Sirve cualquiera de (I.4.8) , p. 11 del libro de texto y sus ejemplos posteriores.
   (b) Matriz escalonada por filas. Pon un ejemplo (1 punto).
   Es la definición (I.5.3), p. 13 del libro y como ejemplo sirve algo tan simple como (1).
   (c) Polinomio mínimo de una matriz. Pon un ejemplo (1 punto).
   Es la definición (II.3.1.2), p. 84 del libro y como ejemplo sirve algo tan simple como: el polinomio mínimo de la matriz (1) es $x - 1$.

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:
   (a) Toda matriz compañera es semejante a su traspuesta (3 puntos).
   Es la primera parte de la proposición (II.4.2.17), p. 108 del libro de texto.
   (b) Multiplicar por cualquier escalar una línea de una matriz no altera su rango (1 punto).
   No es cierto; la matriz (1) tiene rango 1 y si multiplico su fila por 0 queda la matriz (0) de rango 0.

3. Dada la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$
   explica el siguiente hecho
$$P_{13}AP_{13} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{pero} \quad (A - 5I)e_1 \neq (0) \quad \text{(3 puntos)}$$
   No hay incompatibilidad; si exigiéramos $(A-5I)e_1 = (0)$ estaríamos asegurando que el polinomio mínimo de e_1 es $x - 5$, pero P_{13} no tiene la primera columna e_1 y por tanto, $P_{13}AP_{13}$ no tiene por qué dar el polinomio mínimo de e_1.

4. Enuncia y demuestra un resultado que relacione el rango de una matriz con los órdenes de ciertas submatrices (10 puntos).

   Es la proposición (I.7.3) de la p. 29 del libro de texto.

Problemas

1. *Describir el núcleo de la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

en función de los parámetros a y b (5 puntos).

Solución:

Escalonamos por columnas la matriz acumulando las operaciones en la identidad. Al efecto construimos

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & b \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mediante operaciones elementales en las columnas obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto, si a y b son cero el núcleo está generado por las dos últimas columnas de la submatriz inferior

$$< (-2, 1, 0), (-1, 0, 1) >$$

Si $a \neq 0$, mediante una operación elemental en las columnas obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \hline 1 & -2 & -\frac{-2\,b+a}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y el núcleo está generado por la última columna de la submatriz inferior, o más sencillo por

$$(a - 2b, b, -a)$$

Finalmente, si $a = 0$ y $b \neq 0$, mediante operaciones elementales en las columnas, obtenemos la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Y el núcleo está generado por el vector $(-2, 1, 0)$.

2. Sea $\varphi\colon \mathbf{Q}^4 \longrightarrow \mathbf{Q}^4$ la aplicación dada por $\varphi(a, b, c, d) = (b, a, d, c)$.

   (a) *Probar que φ es un endomorfismo* (1 punto).

   (b) *Matriz coordenada A de φ en base canónica* (1 punto).

   (c) $\ker \varphi$ *e Im* (φ) (1 punto).

   (d) *Matrices P y Q regulares tales que PAQ es la $[I_r, 0]$ respectiva* (1 punto).

   (e) *Bases (v_1, v_2, v_3, v_4) y (w_1, w_2, w_3, w_4) tales que*

   $$\varphi(v_i) = w, i \leq r \quad \varphi(v_j) = 0,\ j > r \quad \text{(1 punto).}$$

   (f) *Forma canónica racional F de A* (1 punto)

   (g) *Matriz P regular tal que $P^{-1}AP = F$* (1 punto)

   (h) *Base (u_1, u_2, u_3, u_4) en la que la matriz coordenada de φ es F* (1 punto)

   (i) *Forma canónica de Jordan, si existe, J de φ* (2 puntos)

   (j) *Matriz T regular tal que $T^{-1}AT = J$* (3 puntos)

   (k) *Base (z_1, z_2, z_3, z_4) en la que la matriz coordenada de φ es J* (1 punto)

   (l) *¿Es diagonalizable φ?. En caso afirmativo, describe una base de vectores propios* (1 punto).

Solución:

(a)

$$\varphi(t(a, b, c, d) + s(m, n, p, q)) = (tb + sn, ta + sm, td + sq, tc + sp) =$$

$$= t(b, a, c, d) + s(n, m, q, p) = t\varphi(a, b, c, d) + s\varphi(m, n, p, q)$$

(b) Se tiene: $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_1, \varphi(e_3) = e_4, \varphi(e_4) = e_3$. Luego

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Puesto que A es regular, $\ker \varphi$ es (0) y la imagen es $\mathbf{Q}^4$.

(d)

$$AP_{12}P_{34} = I_4 \Longrightarrow P = I_4 \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Este apartado se puede obtener a simple vista, pero siguiendo el método explicado

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)Q = (e_2, e_1, e_4, e_3)$$
$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)P^{-1} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

(f) A es su forma racional

(g) Tomar $P = I_4$

(h) Así,

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4)P = (e_1, e_2, e_3, e_4)PI_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

(i) El polinomio asociado a cada caja compañera es $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Así,

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(j) Para $i = 1, 2$, el pilar asociado al valor propio -1 es

$$Q_{i1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el pilar asociado al valor propio 1 es

$$Q_{i1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$Q_i = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{Q} = \mathrm{diag}(\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente, $T = PQ = I_4Q = Q$.

(k) La base pedida es

$$(e_1, e_2, e_3, e_4)T = (e_1, e_2, e_3, e_4) \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{array}\right) =$$
$$= (-e_1 + e_2, e_1 + e_2, -e_3 + e_4, e_3 + e_4)$$

(l) Sí, porque J es diagonal. Una base de vectores propios es pues la asociada a J, es decir, la del apartado anterior.