ALGEBRA LINEAL I **7–Setiembre–05**

La duración del examen es de dos horas. Elige una de las siguientes opciones

$$1+2+4 \quad \text{o} \quad 1+2+5 \quad \text{o} \quad 3+4 \quad \text{o} \quad 3+5$$

1. Define los siguientes conceptos:

   (a) Operación elemental en una familia de vectores. Pon un ejemplo (2 puntos)

   (b) Núcleo de una matriz. Pon un ejemplo (2 puntos)

   (c) Vector propio de un endomorfismo. Pon un ejemplo (2 puntos)

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados

   (a) El determinante de una matriz regular es distinto de cero (2 puntos)

   (b) El polinomio mínimo de e_1 respecto de A es divisor del polinomio característico de A (2 puntos)

3. Enuncia y demuestra un resultado que relacione el rango de filas y el de columnas de una matriz (10 puntos)

4. Se considera la aplicación $f\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ dada por

   $$fe_1 = e_1 + e_2 \quad f(e_1+e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3$$

   Se pide:

   (a) Bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im}(f)$ (2 puntos).

   (b) Matriz coordenada A de f en la base $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ (3 puntos).

   (c) Matrices P y Q regulares tales que PAQ es la $[I_r, 0]$ respectiva (2 puntos).

   (d) Bases (v_1, v_2, v_3) y (w_1, w_2, w_3) tales que

   $$f(v_i) = w_i, i \le r \quad f(v_j) = 0,\ j > r \quad \text{(2 puntos).}$$

   (e) Rango de f (1 punto).

   Solución

   (a) $\operatorname{Im}(f) = \mathbf{R} < e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+e_2+e_3 >$, luego una base es

   $$(e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+e_2+e_3)$$

   Por dimesiones, el núcleo es 0 y su base es el vacío.

(b)

$$\begin{aligned}
&fe_1 = e_1 + e_2 = 0e_1 + 1(e_1 + e_2) + 0(e_1 + e_2 + e_3)\\
&f(e_1 + e_2) = e_1 - e_2 = 2e_1 - 1(e_1 + e_2) + 0(e_1 + e_2 + e_3)\\
&f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 = 0e_1 + 0(e_1 + e_2) + 1(e_1 + e_2 + e_3)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(d) Por tanto,

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, 2e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$$

$$(w_1, w_2, w_3) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 + e_2, 2e_1, e_1 + e_2 + e_3)$$

(e) Se trata del rango de cualquiera de sus matrices coordenadas: 3.

5. Se considera la aplicación $f\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ dada por

$$fe_1 = e_1 + e_2 \quad f(e_1 + e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Se pide:

(a) Matriz coordenada A de f en la base $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ (3 puntos).

(b) Rango de f (1 punto).

(c) Forma canónica de Jordan, si existe, J de f (2 puntos)

(d) Matriz T regular tal que $T^{-1}AT = J$ (2 puntos)

(e) Base (z_1, z_2, z_3) en la que la matriz coordenada de f es J (1 punto)

(f) ¿Es diagonalizable f?. En caso afirmativo, describe una base de vectores propios (1 punto).

Solución

(a)

$$
\begin{aligned}
&fe_1 = e_1 + e_2 = 0e_1 + 1(e_1 + e_2) + 0(e_1 + e_2 + e_3)\\
&f(e_1 + e_2) = e_1 - e_2 = 2e_1 - 1(e_1 + e_2) + 0(e_1 + e_2 + e_3)\\
&f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 = 0e_1 + 0(e_1 + e_2) + 1(e_1 + e_2 + e_3)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(b) Se trata del rango de cualquiera de sus matrices coordenadas: 3.

(c) La propia A es una forma cíclica de sí misma. Debemos, pues, tratar por separado sus dos cajas compañeras.

La primera es $C(x-2)(x+1)$ que conduce a $J_1 = \operatorname{diag}[-2, 1]$ con pilares $Q_{11} = \binom{-1}{1}$ y $Q_{12} = \binom{2}{1}$ Por tanto, $Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La segunda caja es $C(x-1)$ semejante a sí misma y $Q_2 = 1$. En definitiva,

$$
J = \operatorname{diag}[-2, 1, 1]
$$

(d)

$$
T = P\operatorname{diag}[Q_1, Q_2] = \operatorname{diag}[Q_1, Q_2] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(e)

$$
(z_1, z_2, z_3) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)T = (e_2, 3e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)
$$

(f) f sí es diagonalizable pues su forma de Jordan es diagonal. Como base de vectores propios sirve la asociada a esta matriz

$$
(e_2, 3e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)
$$