ALGEBRA LINEAL I **22–Junio–05**

Teoría

1. Define los siguientes conceptos:
   (a) Matrices equivalentes. Pon un ejemplo (2 puntos).
   Ver I.7.1, p. 29 del libro de texto. Por ejemplo (2) y (3).
   (b) Matrices semejantes. Pon un ejemplo (2 puntos).
   Ver II.2.2, p. 69 del libro de texto. Por ejemplo,
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (c) Endomorfismo diagonalizable. Pon un ejemplo (2 puntos).
   Es la definición 7.1.1 de los apuntes sobre teoría del endomorfismo.
   Por ejemplo, el endomorfismo $hv = v, \forall v \in V$.
2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:
   (a) Toda matriz es semejante a una matriz diagonal (2 puntos).
   No, por ejemplo, si la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fuera semejante a una diagonal, ésta debiera ser (0) y por tanto, la de partida también, pero no lo es.
   (b) En un espacio vectorial V todo vector no nulo es libre (2 puntos).
   Se trata del apartado iii) de la proposición III.2.3 p. 133 del libro de texto.
3. Enuncia y demuestra un resultado que describa 4 caracterizaciones de una aplicación lineal inyectiva (10 puntos)

   Es la proposición III.4.9, p.143 del libro de texto.

Problemas

Se considera la aplicación $\varphi\colon \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}_2[x]$ *dada por* $\varphi(f) = df/dx$. *Se pide:*

(a) *Probar que* φ *es lineal* (1 punto).

(b) *Bases de* $\ker\varphi$ *e* $Im(\varphi)$ (2 puntos).

(c) *Matriz coordenada* A *de* φ *en base canónica* (2 puntos).

(d) *Matrices* P *y* Q *regulares tales que* PAQ *es la* $[I_r, 0]$ *respectiva* (2 puntos).

(e) *Bases* (f_1, f_2, f_3) *y* (g_1, g_2, g_3) *tales que*

$$\varphi(f_i) = g_i, i \leq r \quad \varphi(f_j) = 0, \, j > r \quad \text{(2 puntos).}$$

(f) *rango de* φ (1 punto).

(g) *Forma canónica racional* F *de* A (1 punto)

(h) *Matriz* P *regular tal que* $P^{-1}AP = F$ (2 puntos)

(i) *Base* (h_1, h_2, h_3) *en la que la matriz coordenada de* φ *es* F (1 punto)

(j) *Forma canónica de Jordan, si existe,* J *de* φ (1 punto)

(k) *Matriz* T *regular tal que* $T^{-1}AT = J$ (2 puntos)

(l) *Base* (p_1, p_2, p_3) *en la que la matriz coordenada de* φ *es* J (1 punto)

(m) *¿Es diagonalizable* φ*?. En caso afirmativo, describe una base de vectores propios* (2 puntos).

Solución

(a)
$$\varphi(tf + sg) = d(tf + sg)/dx = tdf/dx + sdf/dx = t\varphi(f) + s\varphi(g)$$

(b) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbf{R} < \varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2) >= \mathbf{R} < 0, 1, x >$ Luego la base pedida es, por ejemplo, $(1, x)$. Ahora, el núcleo posee dimensión $3 - 2 = 1$ y una base será, por ejemplo, el 1, cuya imagen[1] es 0.

(c) Puesto que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi(x^2) = 2x$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Por ejemplo,

$$AP_{12}P_{23}Q_2(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $P = I_3$ y

$$Q = P_{12}P_{23}Q_2(1/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] derivada

(e) Los polinomios f_i tienen por coordenadas las columnas de Q y son $(x, (1/2)x^2, 1)$. Como g_i tomamos los de la base canónica $(1, x, x^2)$, pues $P = I_3$.

(f) El rango de φ es 2, la dimensión de su imagen.

(g) La forma racional F de A es $C(x^3)$

(h) Cálculos efectuados con Psalmo[2]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Como siempre los polinomios h_i se obtienen haciendo las combinaciones lineales con las columnas de P, obteniendo $(x^2, 2x, 2)$.

(j) La forma de Jordan de φ es la de A, que en este caso coincide con F.

(k) Por tanto, tomamos $T = P$.

(l) Y, en consecuencia, $p_i = h_i$.

(m) φ no puede ser diagonalizable, porque su forma de Jordan no es diagonal.

[2]el lector puede obtener otros resultados