ALGEBRA LINEAL I **13–Setiembre–04**

Teoría

1. Define los siguientes conceptos:

   (a) Combinación lineal de una familia $(v_1, \ldots, v_m)$ de vectores. Pon un ejemplo (2 puntos).

   Un vector v se dice combinación lineal de la familia $(v_1, \ldots, v_m)$ si existen escalares
   $(t_1, \ldots, t_m)$ tales que
   $$v = t_1v_1 + \cdots + t_mv_m$$
   Por ejemplo, $(2, 2) = 2(1, 1)$.

   (b) Endomorfismo diagonalizable. Pon un ejemplo (2 puntos).

   Un endomorfismo se dice diagonalizable si posee una matriz coordenada diagonal.
   Por ejemplo,
   $$h\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{dado por } he_1 = 2e_1, he_2 = 0$$
   cuya matriz coordenada es $\mathrm{diag}[2, 0]$.

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo las siguientes proposiciones:

   (a) Si una matriz es diagonalizable, su polinomio característico es producto de factores lineales (2 puntos).

   Se trata de la primera parte del teorema II.2.17, p. 76 del libro de texto.

   (b) Toda matriz compañera es semejante a su traspuesta (2 puntos). Es la primera parte de la proposición II.4.2.17, p. 108 del libro de texto.

   (c) Las imágenes en W de una familia libre de V determinan una nica aplicacin lineal de V en W. (2 puntos).

   Esto es falso; hay "infinitas" aplicaciones lineales de $\mathbf{R}^3$ en sí que transforman la familia libre (e_1, e_2) en la familia (e_2, e_3).
   Por ejemplo, e_3 puede pasar a e_1, e_2, $e_3, \ldots$

3. Enuncia y demuestra un resultado que describa la nulidad o núcleo de una matriz (10 puntos).

   Se trata del teorema I.10.5 , p.50 del libro de texto.

Problemas

1. *Determinar en función de los valores de a, b, c si la siguiente matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En los casos afirmativos encontrar una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (10 puntos).

Solución: El polinomio característico es $(x-1)^2(x-c)$. Por tanto, debemos distinguir lo casos $c \neq 1, c = 1$

- Si $c = 1$, la única matriz diagonal que puede ser semejante a A es la matriz identidad, pero $P^{-1}AP = I_3$ obliga a $A = I_3$, lo que es imposible.
- Si $c \neq 1$, el valor propio 1 es doble; ahora, el rango de $I_3 - A$ depende de a: es 1 si $a = 0$, y 2 si $a \neq 0$.
  Por tanto, A es diagonalizable si y sólo si $a = 0$.
  Puesto que

$$V(1) = \mathcal{N}(I - A) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} = K < (1,0,0), (0,1,0) >$$

$$V(c) = \mathcal{N}(cI - A) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} c-1 & 0 & -1 \\ 0 & c-1 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K < \left((c-1)^{-1}, b\,(c-1)^{-1}, 1\right) >$$

  se tiene

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (c-1)^{-1} \\ 0 & 1 & b\,(c-1)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \operatorname{diag}[1,1,c]$$

2. *Se considera la aplicación $f\colon M_2(\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Q}$ dada por $f(A) = \operatorname{traza} \operatorname{de} A$. Se pide:*

   (a) Probar que f es lineal (2 puntos).

   (b) Bases de $\ker f$ e $\operatorname{Im}(f)$ (2 puntos).

   (c) Matriz coordenada A de f en bases canónicas (1 punto).

   (d) Matrices P y Q regulares tales que PAQ es la $[I_r, 0]$ respectiva (2 puntos).

   (e) Bases (A_1, A_2, A_3, A_4) y (q) tales que

$$fA_1 = q \quad fA_j = 0,\, j > r \quad \text{(2 puntos).}$$

   (f) rango de f (1 punto).

   Solución

(a) Designando por tr a la traza,

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum(a_{ii}+b_{ii}) = \sum a_{ii} + \sum b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

y

$$\mathrm{tr}(\lambda\, A) = \sum(\lambda\, a_{ii}) = \lambda \sum a_{ii} = \lambda\, \mathrm{tr}(A)$$

(b) Puesto que $f(I) = 2$, claramente, f es sobre e $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{Q}$ de base (1). Ahora, $\ker f$ posee dimensión 3. Buscaremos 3 matrices libres de traza 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Luego,

$$A = (1\ 0\ 0\ 1)$$

(d)

$$AP_{14}(-1) = (1\ 0\ 0\ 0) = [I_1, 0]$$

Tómese

$$P = I_1, Q = P_{14}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Por tanto, la base (q) es la canónica (1) y

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})Q = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, -E_{11} + E_{22})$$

(f) Se trata del rango de cualquiera de sus matrices coordenadas: 1.