ALGEBRA LINEAL I **23–Junio–04**

1. Define los siguientes conceptos:

   (a) Variedad lineal (generada por los vectores $v_1, \dots, v_m$) (2 puntos)

   (b) Valor propio y vector propio de un endomorfismo h.
   Pon un ejemplo (2 puntos).

   (c) Bloque de Jordan. Pon un ejemplo (2 puntos).

   Solución:

   (a) Es el conjunto de sus combinaciones lineales; es decir, el conjunto de vectores de la forma $t_1 v_1 + \cdots + t_m v_m$

   (b) Se dice valor propio de un endomorfismo h a cualquier raíz de su polinomio característico.
   Dado un valor propio t, se dice vector propio a un vector no nulo v tal que $hv = tv$.
   Por ejemplo, $h\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dado por

   $$h(e_1) = e_1 + e_2 \quad h(e_2) = 3e_2$$

   Su polinomio característico es $(x-1)(x-3)$, luego 1 y 3 son valores propios. Asimismo, e_2 es un vector propio asociado al valor propio 3.

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo los siguientes enunciados:

   (a) Sean $u, v_1, \dots, v_m$ vectores de $\mathbf{K}^n$. Entonces,

   $$u \in K < v_1, \dots, v_m > \Longleftrightarrow \operatorname{rang}(v_1, \dots, v_m) = \operatorname{rang}(v_1, \dots, v_m, u)$$

   (3 puntos).

   (b) Si A o B son matrices no regulares $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (2 puntos)

   (c)

   $$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[d_1, \dots, d_n] \Longrightarrow P^i \in \mathcal{N}(d_i I - A) \text{ y } \det(d_i I - A) = 0$$

   (4 puntos)

   (d) La forma canónica racional y la irreducible de un endomorfismo son diferentes (2 puntos).

   Solución:

   (a) Es el corolario I.9.6, p.45 del libro del curso.

(b) En ese caso AB tampoco puede ser regular y ambos miembros de la igualdad propuesta son 0.

(c) Es la proposición II.2.5, p.70 del libro del curso.

(d) No siempre; si los factores invariantes son (potencia de) irreducibles, ambas deben coincidir.

Por ejemplo, $C((x-1)^3)$ es la forma racional e irreducible de sí misma.

3. Calcula los posibles polinomios mínimos y formas canónica irreducible de una matriz no diagonalizable cuyo polinomio característico sea $(x-2)*(x-3)^2$ (2 + 1 puntos).

Solución: Por el teorema de Hamilton-Cayley, el polinomio mínimo debe ser múltiplo de $(x-2)*(x-3)$ y divisor de $(x-2)*(x-3)^2$. Puesto que no es diagonalizable, sólo queda la posibilidad $(x-2)*(x-3)^2$.

Por grados, no puede haber más factores invariantes. Así, los divisores elementales son $(x-2)$ y $(x-3)^2$; luego la forma irreducible es

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 0 & -9 \\ & 1 & 6 \end{array}\right)$$

4. Obtén razonadamente el determinante de la siguiente matriz de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix} \quad \text{(10 puntos)}$$

Solución:

Restando a cada columna la anterior:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a+b & -ab+b^2 & -ab^2+b^3 \\ 1 & -a+c & -ac+c^2 & -ac^2+c^3 \\ 1 & -a+d & -ad+d^2 & -ad^2+d^3 \end{vmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{vmatrix} -a+b & -ab+b^2 & -ab^2+b^3 \\ -a+c & -ac+c^2 & -ac^2+c^3 \\ -a+d & -ad+d^2 & -ad^2+d^3 \end{vmatrix}$$

”Sacando factor común”

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

Análogamente,

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-cb \\ 1 & d-b & d^2-db \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & c^2-cb \\ d-b & d^2-db \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

5. Sea h la aplicación de $\mathbf{R}_2[x]$ en sí, que asigna acada polinomio su derivada. Se pide:

   (a) Probar que h es un endomorfismo (2 puntos)

   (b) Matriz coordenada A de h en la base $(x, 1+x, x^2+x+1)$ (2 puntos).

   (c) Matriz P tal que $P^{-1}AP$ es la forma racional F de A (3 puntos).

   (d) Base de $\mathbf{R}_2[x]$ en la que la matriz coordenada de h es F (1 punto)

   (e) Base de $\mathbf{R}_2[x]$, si existe, en la que la matriz coordenada de h es su forma de Jordan (1 punto).

   Solución:

   (a) Es consecuencia de que la derivada de la suma es la suma de las derivadas y de que $(cp(x))' = cp'(x)$

   (b)
   $$\begin{aligned} h(x) &= 1 = -1(x) + 1(1+x) + 0(x^2+x+1) \\ h(1+x) &= 1 = -1(x) + 1(1+x) + 0(x^2+x+1) \\ h(x^2+x+1) &= 2x+1 = 1(x) + 1(1+x) + 0(x^2+x+1) \end{aligned}$$

   Luego
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Orlemos, en primer lugar, A por debajo con la matriz I_3.
   $$\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Aplicando el procedimiento **MINIMO**
   $$P_{12}(1)A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_1$$

$$A_1P_{12}(-1) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_2$$

Ahora **CEROS A DERECHA** conduce a

$$A_2P_{13}(-1) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_3$$

$$P_{13}(1)A_3 = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_4$$

El procedimiento **UN BLOQUE** nos indica intercambiar las columnas 1 y 3 (y luego las filas)

$$P_{13}A_4P_{13} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = A_5$$

Debemos volver a empezar con **MINIMO1**

$$P_{23}A_5P_{23} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = A_6$$

$$Q_2(1/2)A_6Q_2(2) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = A_7$$

Finalmente, dividiendo por 2 la tercera fila

$$Q_3(1/2)A_7Q_3(2) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La parte superior es la forma racional F de A y la parte inferior la matriz P pedida:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) La nueva base es

$$(x, 1+x, x^2+x+1)P = (x^2+1, 2x, 2)$$

(e) La forma racional coincide con la de Jordan; por tanto, la base solicitada es la misma. Si se prefiere la forma de Jordan, con los 1 por encima de la diagonal es suficiente permutar la base: $(2, 2x, x^2+1)$