

Teoría

1. Define los siguientes conceptos:

- (a) Determinante de una matriz cuadrada¹ (2 puntos).

Se trata de la función $\det: M_n(K) \longrightarrow K$ definida por

- $\det((a)) = a$, si $n = 1$
- $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i^1 \det(A_i^1)$, si $n > 1$, donde A_i^1 es la submatriz de A que resulta de suprimir la fila i y la columna 1.

- (b) Matriz diagonalizable. Pon un ejemplo (2 puntos).

Una matriz se dice diagonalizable si es semejante a una diagonal. Por ejemplo, la matriz (1).

2. Afirma razonadamente o niega mediante un contraejemplo las siguientes proposiciones:

- (a) Una familia libre no puede poseer más vectores que un sistema generador (2 puntos).

Se trata del corolario I.9.7, p. 45 o el III.4.15 p. 144 del libro de texto.

- (b) Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones; si el rango de A coincide con el número de incógnitas, el sistema posee una única solución (2 puntos).

Esto es falso; considérese el sistema $x = 1, x = 0$. La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, lo que coincide con el número de incógnitas; pero el sistema claramente carece de soluciones.

- (c) El conjunto de vectores propios asociados a un valor propio, incluido el (0), es un subespacio (2 puntos).

Si el valor propio es t y la matriz es A , dicho conjunto es la nulidad de la matriz $tI - A$, que siempre es un subespacio (Teorema I.10.5, p.50 del libro de texto).

3. Enuncia y demuestra un resultado que permita obtener una base a partir de un sistema generador de un espacio vectorial arbitrario (10 puntos).

Se trata, por ejemplo de la proposición III.3.9, p.138 del libro de texto.

¹Puedes enunciar el teorema que lo construye como una aplicación recurrente

Problemas

1. Discutir en función de los valores de a y b , y resolver en los casos posibles el siguiente sistema matricial sobre $\mathbf{Q}$:

$$\begin{bmatrix} b & 1 & a & b \\ 3b & 2 & a & 2b \\ b & 1 & 2a & 2b \\ 2b & 1 & 0 & 2b \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a+b+1 & a \\ 3a+2b+1 & b \\ 2b+1 & 1 \\ a+2b & -a \end{bmatrix}$$

Solución

La matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & a & b & a+b+1 & a \\ 3b & 2 & a & 2b & 3a+2b+1 & b \\ b & 1 & 2a & 2b & 2b+1 & 1 \\ 2b & 1 & 0 & 2b & a+2b & -a \end{array} \right]$$

que es equivalente por filas a

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & a & b & a+b+1 & a \\ 0 & -1 & -2a & -b & -b-2 & -3a+b \\ 0 & 0 & a & b & -a+b & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & b & -a+b & -b \end{array} \right]$$

por lo que si a y b son no nulos el sistema posee una única solución:

$$\begin{bmatrix} (a-1)/b & (2b-3a+1)/b \\ a+2 & 5a-2b-2 \\ 0 & (b-a+1)/a \\ (b-a)/b & -1 \end{bmatrix}$$

Para $b = 0$ el sistema matricial es equivalente a

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & a & 0 & a+1 & a \\ 0 & -1 & -2a & 0 & 0-2 & -3a \\ 0 & 0 & a & 0 & -a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \end{array} \right]$$

incompatible.

Para $a = 0$ la matriz ampliada equivalente es

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} b & 1 & 0 & b & 1+b & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -b & -b-2 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b-1 \end{array} \right]$$

luego el sistema es incompatible si $b \neq -1$.

Finalmente, para $a = 0$ y $b = -1$ la solución es $S_0 + NT$ donde

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T \text{ arbitraria } 1 \times 2$$

2. Se considera la aplicación $f: \mathbf{Q}^3 \longrightarrow \mathbf{Q}^2$ dada por $f(a, b, c) = (a - b, c)$. Se pide:

- (a) Probar que f es lineal (2 puntos).
- (b) Bases de $\ker f$ e $\text{Im}(f)$ (2 puntos).
- (c) Matriz coordenada A de f en bases canónicas (1 punto).
- (d) Matrices P y Q regulares tales que PAQ es la $[I_r, 0]$ respectiva (2 puntos).
- (e) Bases (v_1, v_2, v_3) y (w_1, w_2) tales que

$$fv_i = w_i, i = 1, \dots, r \quad fv_j = (0), j > r \quad (2 \text{ puntos}).$$

- (f) rango de f (1 punto).

Solución

- (a) Se trata de la aplicación lineal dada por

$$fe_1 = e_1 \quad fe_2 = -e_1 \quad fe_3 = e_2$$

- (b) (e_1, e_2) es un s.g., luego, es base de $\text{Im}(f)$; así el núcleo posee dimensión $3 - 2 = 1$; puesto que $e_1 - e_2$ es un vector no nulo del núcleo, constituye una base.
- (c) De a) deducimos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$AP_{12}(1)P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [I_2, 0]$$

Tómese

$$P = I_2, Q = P_{12}(1)P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Por tanto, la base (w_1, w_2) es la canónica (e_1, e_2) y

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)Q = (e_1, e_3, e_1 + e_2)$$

(f) Se trata del rango de cualquiera de sus matrices coordenadas: 2.