

ALGEBRA LINEAL I

15-Abril-03

1. (a) Dadas A y B matrices regulares expresa razonadamente $(AB)^{-1}$ en función de A^{-1} y B^{-1} (0.5 + 1 puntos).

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$$

Análogamente,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = BIB^{-1} = I$$

Por tanto, $(AB)^{-1} = (B^{-1}A^{-1})$.

- (b) Describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un método para escalar por filas una matriz (3 puntos).

Ver el libro de texto: procedimiento ESCALONA_POR_FILAS p.16;

- (c) Define el concepto de matrices equivalentes (1 punto). Pon un ejemplo (0.5 puntos).

Para el concepto, ver el libro de texto, def. 7.1, p.29; las matrices (1) y (2) son equivalentes, pues ambas tienen rango 1.

- (d) Afirma razonadamente o niega con un contraejemplo los siguientes enunciados:

- i. Si A y B son multiplicables y diferentes de cero AB es diferente de cero (1 punto). Es falso, véanse las matrices P y Q del ejercicio del libro, p. 9
- ii. Sea $A \in M_n(\mathbf{Q})$. Entonces,

$$AB = I_n \implies BA = I_n \quad (3 \text{ puntos}).$$

Es cierto; se trata del corolario 6.18 del libro de texto.

2. Enuncia y demuestra un resultado que describa el núcleo o subespacio nulo de una matriz (10 puntos).

Se trata del teorema 10.5 de la p. 50 del libro.

3. Calcular la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ (5 puntos)}$$

Primera solución:

$$P_{43}P_{42}(-1/2)P_{23}P_{31}(-1/2)P_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$P_{32}(-1/2)P_{43}P_{21}(-1/2)P_{23}P_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y

$$(P_{32}(-1/2)P_{21}(-1/2))(P_{43}P_{23}P_{12})A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Tómese

$$P = P_{43}P_{23}P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = (P_{32}(-1/2)P_{21}(-1/2))^{-1} = P_{21}(1/2)P_{32}(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Estudiar en función de los parámetros a y b si es diagonalizable (5 puntos).
- Encontrar cuando sea posible una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (10 puntos).

Solución: $\det(xI - A) = (x - 1)(x - a)(x - 2)$. Los casos a estudiar son:

- $\boxed{1 \neq a \neq 2}$: Los tres valores propios son simples y la matriz A es diagonalizable.

$V(1)$: Se trata de calcular

$$\mathcal{N}(I - A) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ -2 & -b & -1 \end{pmatrix}$$

Escalonando por columnas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ -2 & -b & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2-b & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2-ab+2a \end{pmatrix}$$

luego $\mathcal{N}(I - A) = \mathbf{Q} < 1-a, a, -2+2a-ab >$.

$V(a)$: Se trata de calcular

$$\mathcal{N}(aI - A) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -2 & -b & a-2 \end{pmatrix}$$

Escalonando por columnas

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -2 & -b & a-2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1+a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -2 & a-2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a-2} \end{pmatrix}$$

luego $\mathcal{N}(I - A) = \mathbf{Q} < 0, a-2, b >$.

$V(2)$: Se trata de calcular

$$\mathcal{N}(2I - A) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 2-a & 0 \\ -2 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

que es directamente, $\mathbf{Q} < 0, 0, 1 >$. Por tanto, poniendo

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ a & a-2 & 0 \\ -2+2a-ab & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \text{diag}[1, a, 2]$$

- $\boxed{a=1}$: Entonces, 1 es doble y

$$\dim V(1) = 3 - \text{rang}(I - A) = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -b & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 < 2$$

Por tanto, A no es diagonalizable.

- $\boxed{a=2}$: Entonces, 2 es doble y

$$\dim V(2) = 3 - \text{rang}(2I - A) = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -b & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 \iff b = 0$$

Por tanto, A es diagonalizable si y sólo si $b = 0$.

En este caso,

$$V(2) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (0, 1, 0), (0, 0, 1) >$$

y

$$V(1) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (-1, 2, 2) >$$