ALGEBRA LINEAL I **10–Junio–03**

Segundo parcial

1. Da una explicación al siguiente hecho

$$P_{13}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} P_{13} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

pero $p_A(e_1) \neq x - 6$, lo que parece contradecir el método para calcular el polinomio mínimo de e_1 mediante operaciones elementales (2 puntos).

Solución: El método exige que la primera columna de la matriz P sea e_1.

2. Enuncia y demuetra un teorema que justifique la existencia y unicidad del polinomio mínimo de una matriz (5 puntos).

Ver, por ejemplo, el libro de texto p. 85 prop. 3.1.3

3. Prueba que, en un espacio vectorial abstracto V, los coeficientes de un vector v como combinación lineal de una base $(v_1, \ldots, v_n)$ son únicos (3 puntos).

Ver, por ejemplo, el libro de texto p. 137 prop. 3.6

4. Sea h el endomorfismo de $M_2(\mathbf{R})$ dada por

$$h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d & -c \\ -2b & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) (%) Matriz coordenada A de h en la base (E_{ij}) (3 puntos).

(b) Matriz P tal que $P^{-1}AP$ es la forma racional F de A (2 puntos).

(c) Base de $M_2(\mathbf{R})$ en la que la matriz coordenada de h es F (1 punto)

(d) Forma de Jordan, si existe, J de A (1 punto).

(e) En su caso, matriz T tal que $T^{-1}AT = J$ (2 puntos).

(f) En su caso, base de $M_2(\mathbf{R})$ en la que la matriz coordenada de h es J (1 punto)

Solución:

(a)

$$h(E_{11}) = E_{22} \quad h(E_{12}) = -2E_{21} \quad h(E_{21}) = -E_{12} \quad h(E_{22}) = 2E_{11}$$

Luego

$$A = \begin{pmatrix} & & & 2 \\ & & -1 & \\ & -2 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

(b)
$$P_{24}AP_{24} = \operatorname{diag}\left[C(x^2-2), \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Y
$$Q_4(-1)P_{24}AP_{24}Q_4(-1) = \operatorname{diag}[C(x^2-2), C(x^2-2)]$$

que es la forma racional de A.

Ahora,
$$P = P_{24}Q_4(-1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 2 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}$$

(c) La nueva base es
$$(E_{11}), E_{12}, E_{21}, E_{22})P = (E_{11}), E_{22}, E_{21}, 2E_{12})P$$

(d) El polinomio mínimo de cada caja compañera es x^2-2 que sobrfe $\mathbf{R}$ escinde en $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ por lo que la forma de Jordan es
$$J = \operatorname{diag}[\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}]$$

(e) Para hallar los pilares nos fijamos en la primera caja compañera de F y obtenemos
$$Q_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q_{12} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente, puesto que la segunda caja es la misma que la primera
$$Q_{21} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q_{22} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y
$$Q = \operatorname{diag}[Q_1, Q_2] \Longrightarrow T = PQ = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) Por tanto, la base asociada a la forma de Jordan es
$$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})T = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Primer parcial

1. Dadas las matrices

$$A = \left(\begin{array}{rr|rrr|r} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   traza rayas horizontales y verticales afin de que se puedan multiplicar por bloques (2 puntos).

   Solución:

   Lo único obligatorio será trazar rayas horizontales adecuadas en B:

$$B = \left(\begin{array}{rrrr} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Lo demás, a gusto del autor.

2. Define el concepto de familia de vectores libre. Pon un ejemplo (2 puntos).

   Ver el libro de texto, def. 4.2 de la p. 10 y alguno de los ejemplos que siguen.

3. Obtén razonadamente las inversas de las matrices elementales (3 puntos).

   (a) $P_{ij}P_{ij}$ es P_{ij} con las filas i, j permutadas, luego I.
   (b) $P_{ij}(-t)P_{ij}(t)$ es sumar a la fila i de $P_{ij}(t)$ la j por $(-t)$, luego I.
   (c) $Q_i(s^{-1})Q_i(s)$ es multiplicar a la fila i de $Q_i(s)$ por s^{-1}, luego I.

4. Prueba que dos matrices semejantes tienen el mismo determinante (1 punto).

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = (\det P)^{-1} \det A \det P = \det A$$

5. Caracteriza a las matrices diagonalizables mediante la suma de las dimensiones de subespacios fundamentales (1 punto).

   Corolario 2.15 ii) de la p. 73 del libro de texto.

6. Caracteriza a las matrices diagonalizables mediante la multiplicidad geométrica y algebraica de los valores propios (1 punto).

   Observación 2.18 de la p. 76 del libro de texto.

7. Dada la matriz A del ejercicio 1, encontrar matrices P y Q regulares tales que PAQ sea la $[I_r, 0]$ respectiva (10 puntos).

   Escalonando por filas

$$P_{45}P_{53}(-2)P_{53}P_{42}(1)P_{32}(2)P_{51}(2)P_{41}(-2)P_{21}(2)P_{12}A$$
$$||$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

$$P = P_{45}P_{53}(-2)P_{53}P_{42}(1)P_{32}(2)P_{51}(2)P_{41}(-2)P_{21}(2)P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora escalonando por columnas F y dividiendo los pivotes por su valor

$$FP_{14}(-2)P_{24}(4)Q_4(1/4)P_{46}(1)Q_2(-1)Q_6(1/2)P_{34}P_{46} = [I_4, 0]$$

$$Q = P_{14}(-2)P_{24}(4)Q_4(1/4)P_{46}(1)Q_2(-1)Q_6(1/2)P_{34}P_{46} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$