

ALGEBRA LINEAL I

6-Setiembre-02

1. Enuncia y demuestra 3 condiciones necesarias y suficientes para que una aplicación lineal sea inyectiva (10 puntos).

Respuesta: Ver libro de texto proposición III 4.9 p. 143

2. Sea A la matriz racional de orden $n \geq 2$ cuyo término (i, j) es $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Se pide:

- (a) $\det(xI - A)$ (3 puntos)
- (b) Matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (4 puntos)
- (c) Polinomio mínimo de A (1 punto).
- (d) Forma racional F de A (1 punto)
- (e) Forma irreducible G de A y matriz S regular tal que $S^{-1}AS = G$ (1 punto).

Solución:

- (a)

$$xI - A = (x\delta_{ij} - (1 - \delta_{ij})) = (-1 - (x-1)\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} x & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & x & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Sumando a la primera fila las demás

$$\det(xI - A) = (x - (n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Haciendo ceros en la primera columna,

$$\det(xI - A) = (x - (n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x+1 \end{vmatrix} = (x - (n-1))(x+1)^{n-1}$$

- (b) Los valores propios son $n-1$ simple y -1 de orden $n-1$.
 Ahora $V(n-1)$ tiene dimensión necesariamente 1; puesto que contiene claramente, $(1, 1, \dots, 1)$

$$V(n-1) = \mathcal{N}((n-1)I - A) = \mathbf{Q} \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle$$

Por otro lado, $-I - A = (-1)$ de orden n ; así

$$V(-1) = \mathcal{N}(-1) = \mathbf{Q} < (1, -1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1, -1) >$$

Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

- (c) El polinomio mínimo es divisor del característico, tiene que tener todas sus raíces y simples. Por tanto, se trata de

$$(x - (n - 1))(x + 1)$$

- (d) Existen diversas formas de actuar. Una es:

La primera caja de la forma racional será

$$C((x - (n - 1))(x + 1)) = \begin{pmatrix} 0 & n - 1 \\ 1 & n - 2 \end{pmatrix}$$

Para las demás cajas observemos que los factores invariantes pueden ser

$$(x - (n - 1))(x + 1), x - (n - 1), \dots$$

ó

$$(x - (n - 1))(x + 1), x + 1, \dots$$

Puesto que el producto de los factores invariantes es el polinomio característico, la primera opción es inviable y

$$F = \text{diag} \left[\begin{pmatrix} 0 & n - 1 \\ 1 & n - 2 \end{pmatrix}, -1, \dots, -1 \right]$$

- (e) Ahora $\begin{pmatrix} 0 & n - 1 \\ 1 & n - 2 \end{pmatrix}$ es semejante a $\text{diag}[n - 1, -1]$. Por tanto,

$$G = \text{diag}[n - 1, -1, -1, \dots, -1]$$

la diagonal de los valores propios de A . Puede tomarse $S = P$ del apartado (b).

3. Define los siguientes conceptos:

- (a) Matriz escalonada por filas. Pon un ejemplo (1 punto).

Respuesta: Véase el libro de texto y los ejemplos que vienen a continuación.

- (b) Matrices equivalentes. Pon un ejemplo (1 punto).

Respuesta: Dos matrices del mismo tamaño A y B se dicen equivalentes si existen matrices P y Q regulares tales que $B = PAQ$. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pues $B = P_{21}(-3)$.

- (c) Divisores elementales de una matriz. Pon un ejemplo (1 punto).

Respuesta: Son los polinomios asociados a las cajas compañeras de la forma irreducible.

Por ejemplo, si $A = \text{diag}[1, 2]$, los polinomios $x - 1$ y $x - 2$.

- (d) Vector propio de un endomorfismo. Pon un ejemplo (1 punto).

Respuesta: Un vector v no nulo tal que $hv = tv$. Por ejemplo si $h = id$, cualquier vector no nulo.

4. Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius (1 punto).

Respuesta: Véase el libro de texto (por ejemplo).

5. Afirma razonadamente o niega con un contraejemplo los siguientes enunciados:

- (a) Si A es regular, su factorización LU es única (2 puntos).

Respuesta: Cierta; para una demostración, véanse los apuntes del profesor.

- (b) Si A posee n columnas, rango r , N es regular y AN es escalonada por columnas, las $n - r$ últimas columnas de A son una base de la nulidad de A (2 puntos).

Respuesta: El enunciado contiene una errata. Debe decir, ... las $n - r$ últimas columnas de N ... Tal como está la afirmación es falsa siendo

$$A = (1 \ 0)$$

un contraejemplo, pues la última columna de A es (0) y nunca es base. Con la errata corregida, la afirmación es cierta; para una demostración, véase el libro de texto, p. 50 .

- (c) Todo endomorfismo es diagonalizable (1 punto).

Respuesta: Falso; por ejemplo, si su m.c. es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no puede ser diagonalizable.

6. Sea h el endomorfismo de $\mathbf{Q}_2[x]$ dado por $h(a + bx + cx^2) = 2cx + b$. Se pide:

- (a) Bases del núcleo e imagen (2 puntos).
- (b) Antiimagen de $3 + 2x + 2x^2$ (1 punto)
- (c) Subespacio imagen de $\mathbf{Q} \langle x \rangle$ (1 punto)
- (d) Matriz coordenada A de h en la base $(1, x, x^2)$ (1 punto).

- (e) Antiimágenes de $1 + 2x$ (1 punto)
- (f) Matriz coordenada B de h en la base $(1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ (2 puntos).
- (g) Matriz P regular tal que $B = P^{-1}AP$ (2 puntos)

Solución:

- (a) El núcleo es

$$\{a+bx+cx^2 \mid 2cx+b=0\} = \{a+bx+cx^2 \mid c=b=0\} = \{a \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{Q} \langle 1 \rangle$$

La imagen tiene dimensión 2 y una base es fácil de buscar. $(1, x)$ imágenes respectivas de x y x^2 .

- (b) No hay antiimágenes, luego se trata de $\{\}$.
 (c) La base (x) se transforma en (1) , luego el subespacio imagen es

$$\mathbf{Q} \langle 1 \rangle = \mathbf{Q}$$

- (d) $h(1) = 0, h(x) = 1, h(x^2) = 2x$, luego

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Son los polinomios $a + bx + cx^2$ satisfaciendo

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$(a, b, c) = (0, 1, 1) + \mathbf{Q} \langle (1, 0, 0) \rangle = (a, 1, 1) \quad a \in \mathbf{Q}$$

Por tanto, se trata del conjunto de polinomios

$$\{a + x + x^2 \mid a \in \mathbf{Q}\}$$

- (f)

$$h(1) = 0, h(1+x) = 1, h(1+x+x^2) = 1+2x = -1 \cdot 1 + 2(1+x)$$

Por tanto,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (g) Es suficiente escribir la base nueva en función de la antigua

$$(1, 1+x, 1+x+x^2) = (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$