ALGEBRA LINEAL I **3–Mayo–02**

1. (a) Define el concepto de nulidad de una matriz y describe, en el lenguaje que estimes oportuno, un procedimiento para calcularla (2 puntos).
   Indicaciones:
   Ver, por ejemplo, el libro de texto pp. 49 y 50.

   (b) Sea A una matriz racional de orden 4 y determinante 2. Calcula el valor del determinante de

   $$Q_3(2/5)A \quad AP_{23} \quad P_{12}(t)A \quad t \in \mathbf{Q} \quad \text{(1 punto).}$$

   Solución:

   $$\det(Q_3(2/5)A) = 2/5\det(A) = 4/5$$
   $$\det(AP_{23}) = -\det(A) = -2$$
   $$\det(P_{12}(t)A) = \det(A) = 2$$

   (c) Define el concepto de matriz permutación P y prueba que $P^t = P^{-1}$.
   Indicaciones:
   Una matriz permutación es un producto de matrices elementales tipo 1; así:

   $$PP^t = (P_1 \cdots P_r)(P_1 \cdots P_r)^t = (P_1 \cdots P_r)(P_r \cdots P_1) = I_n$$

   Por tanto, P^t es inversa de P.

   (d) Afirma razonadamente o niega con un contraejemplo los siguientes enunciados:

   i. Toda matriz triangular superior es escalonada por filas (1 punto).
   Respuesta: No; véase el contraejemplo 2 del libro, p. 14

   ii. Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbf{Q})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbf{Q})$.

   $$AB = I_m \Longrightarrow BA = I_n \quad \text{(2 puntos).}$$

   Respuesta: No;

   $$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$

   .

   iii. Sean A y B matrices cuadradas y $C = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$. Entonces,

   $$\det(C) = \det(A)\det(B) \quad \text{(2 puntos).}$$

   Indicaciones: Véase el último ejercicio de la lección de determinantes, resuelto en clase.

2. Enuncia y demuestra un resultado que relacione el número de líneas libres de una matriz con el tamaño de sus submatrices regulares (10 puntos).

   Indicaciones: Es la proposición 7.3 p.29 del libro.

3. Consideremos la matriz racional

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Se pide:

   (a) Matrices P y Q regulares tales que $PAQ = [I_r, 0]$ (3 puntos).
   Indicaciones: Se trata, por ejemplo, de hacer operaciones elementales en $(A|I_4)$ hasta obtener $(F|P)$ con F escalonada y después en

$$\left(\frac{F}{I_3}\right) \text{ hasta obtener } \left(\frac{[I_3, 0]}{Q}\right)$$

   Cambiando las filas 1 y 3 en

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   obtenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   Sunando a la tercera fila la segunda por (-2)

$$\left[\begin{array}{ccr|crcc} 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   y $PA = F$ donde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ahora operamos en $\left(\frac{F}{I_3}\right)$. Sumando a la segunda columna la primera por -4,

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y ahora a la tercera columna la primera por -4

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nuevamente a la tercera columna la segunda por -3

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Finalmente basta dividir la tercera columna por -4:
para obtener

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \qquad Q = \left[\begin{array}{rrr} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

(b) Rango de A (1 punto).

Respuesta: 3.

(c) Factorización LU de A (3.5 puntos).

Indicaciones: Se pueden aprovechar los cálculos efectuados en las filas de A hasta obtener U escalonada por filas y, por tanto, triangular superior. Permutando adecuadamente las matrices elementales se tiene $PA = LU$

donde, por ejemplo[1]

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Para cada $B = (a, b, c, 0)^t$ se considera el sistema $AX = B$

i. Probar que es compatible y determinado (1.5 puntos).
Indicaciones:
Directamente, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = 3 = \mathrm{n}^o$ de incógnitas.

ii. Determinar su solución (1 punto).
Indicaciones: Escalonando por filas la matriz ampliada[2] $(A|B)$ se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & c \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & -4 & a-2\,b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y la solución es

$$(c - 2\,a, -1/2\,b + 3/4\,a, -1/4\,a + 1/2\,b)$$

4. (a) Dada la matriz racional

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pregunta si es diagonalizable. En caso afirmativo, encontrar una matriz P regular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal (6 puntos)

Indicaciones:

$\det(xI - A) = (x-5)(x-2)x$; por tanto, los valores propios son $5, 2, 0$ simples y

$$\dim V(5) + \dim V(2) + \dim V(0) \geq 1 + 1 + 1 = 3$$

Por tanto, la suma de dimensiones es 3 y sí es diagonalizable.

$V(5)$: Aplicando el procedimiento **NULIDAD** se obtiene

$$\mathcal{N}(5I - A) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (5, 7, 3) >$$

[1] el resultado tampoco es único

[2] Pudiera el examinando aprovechar los resultados anteriores

$V(2)$ Aplicando el procedimiento **NULIDAD** se obtiene

$$\mathcal{N}(2I-A)=\mathcal{N}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (-1,1,0) >$$

$V(0)=\mathcal{N}(-A)$: Es claro que, $\mathcal{N}(-A)=\mathcal{N}(A)$ y, aplicando el procedimiento **NULIDAD** se obtiene

$$\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} < (0,-1,1) >$$

Por tanto,

$$P=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP=\mathrm{diag}[5,2,0]$$

(b) En las elecciones legislativas de un pais democrático bipartidista sólo hay tres opciones: votar liberal, votar conservador y abtenerse. Los hábitos de los votantes son:

- De los que votan liberal, las tres quintas partes vuelven a votar liberal, la quinta parte vota conservador y la quinta parte se abstiene en la elección siguiente.
- De los que votan conservador, las tres quintas partes vuelven a votar conservador, la quinta parte vota liberal y la quinta parte se abstiene en la elección siguiente.
- De los que se abtienen en una elección, las tres quintas partes votan conservador, la quinta parte vota liberal y la quinta parte se sigue absteniendo en la elección siguiente.

En las elecciones del año 89 los liberales obtuvieron el 60% de los votos y los conservadores el 30%.

Sabiendo que las elecciones son cada cuatro años y que el censo es constante en todas las votaciones, se quiere averiguar:

i. El resultado de las elecciones en el año 2021 (4 puntos).
ii. ¿Puede explicar por qué el porcentaje de votantes de cada partido será práctivamente constante a partir de cierta votación? (1 punto). l.

Indicaciones:

Designando por L_n y C_n los porcentajes de votos recibidos respectivamente por el partido liberal y el conservador, y por A_n el porcentaje de abstención en la elección n-sima

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ C_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \\ C_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} L_m \\ C_m \\ A_m \end{pmatrix} = (1/5)^m \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} L_0 \\ C_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

i) Puesto que del 89 al 21 van 32 años, hay 8 votaciones y

$$\begin{pmatrix} L_8 \\ C_8 \\ A_8 \end{pmatrix} = (1/5)^8 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} L_0 \\ C_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Luego,

$$(1/5)^8 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (2/5)^8 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

El ejercicio se conmsidera completo llegando hasta aquí.
Haremos las operaciones por curiosidad:

$$(1/5)^8 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 5 & -(2/5)^8 & 0 \\ 7 & (2/5)^8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$||$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -(2/5)^8 & 0 \\ 7 & (2/5)^8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/15 & 1/15 & 1/15 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.334 & 0.333 & 0.333 \\ 0.466 & 0.467 & -0.467 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, en el año 2021 el resultado es

$$\begin{pmatrix} L_8 \\ C_8 \\ A_8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.334 & 0.333 & 0.333 \\ 0.466 & 0.467 & -0.467 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 33 \\ 47 \\ 20 \end{pmatrix}$$

ii) Este apartado tiene puntuación extra. Después de ”muchísimas“ votaciones el resultado es

$$\begin{pmatrix} L_m \\ C_m \\ A_m \end{pmatrix} = (1/5)^m \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

con m enorme. Por tanto,

$$(1/5)^m \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 5 & -(2/5)^m & 0 \\ 7 & (2/5)^m & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/15 & 1/15 & 1/15 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Puesto que m es enorme, $(2/5)^m$ es aproximadamente 0 y

$$(1/5)^m \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^m \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/15 & 1/15 & 1/15 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$(1/5)^m \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^m \sim \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 7/15 & 7/15 & 7/15 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} L_m \\ C_m \\ A_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 7/15 & 7/15 & 7/15 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 33 \\ 47 \\ 20 \end{pmatrix}$$